F 7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tomul 24 (38) Fascicola 1

IANUARIE–IUNIE
1979

Cititorii din străinătate se pot abona prin

I L E X I M,

Serv. Export-import presă – Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3–5 – P.O.B. 136–137

Bucharest – Romania

F 74/14
1959

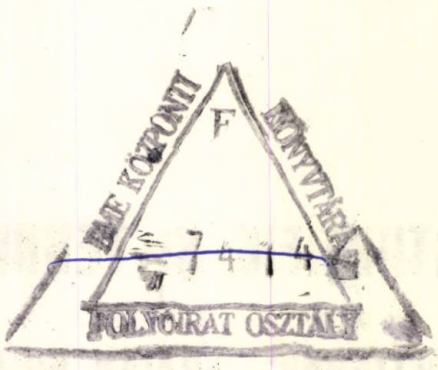
BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1979

1989



COLEGIUL DE REDACȚIE

Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON, Conf. dr. ing. GHEORGHE CREȚU, Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAȘ — redactor șef, Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R., Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU, Prof. dr. ing. VASILE COCHECI, Prof. dr. BORISLAV CRSTICI, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. TOMA DORDEA, Conf. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ, Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS, Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU, Prof. dr. ing. TIBERIU MUREȘAN, Conf. dr. ing. IOAN NIȚĂ, Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII, Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ȘORA, Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU — secretar de colegiu

COMITETUL DE REDACȚIE

I. Matematică-Fizică

— Prof. dr. BORISLAV CRSTICI — redactor responsabil
— Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA
— Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS — redactor responsabil adj.
— Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU
— Conf. dr. EUGEN BURLACU — secretar de redacție

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA“ TIMIȘOARA

Tomul 24 (38) **Fascicola 1** **Iulie-Decembrie 1979**

MATEMATICĂ—FIZICĂ

CARMENCITA UROSU — Produse asociate produsului direct într-o clasă ecuațională 5

E. OLARU, GH. SUCIU — Grafuri hamiltoniene α — critice 9

DORINA RENDI, B. RENDI — Despre unele proprietăți ale grupului SO (n) 16

DORINA RENDI, B. RENDI — Asupra limitelor directe de algebre 22

CARMENCITA UROSU — Translații pe Ω — algebre 25

P. NASLAU — Asupra unei ecuații integro-diferențiale 29

IOSEFINA MIHUȚ — Coomologie cu coeficienți într-un fascicul de forme patrate ale unei varietăți analitice complexe 34

IOSEFINA MIHUȚ — Asupra existenței unor operatori diferențiali foliați pe varietăți analitice complexe foliate 37

ELENA TOPUZU — P. TOPUZU — Asupra controlabilității sistemelor liniare în spații Banach 40

M. NEAGU — Transformări generale ale familiilor compozabile 45

F. KLEPP, M. MORARU, E. SCHULLER — Două metode de optimizare unidimensionale de exploatare cu aplicații în chimie și programarea lor la calculatorul FELIX C-256 51

DORINA RENDI, B. RENDI — Structuri diferențiabile pe spații metrice convexe I. 56

RADA BAEA — Cercetări experimentale asupra efectului Guillemin invers 60

C. MARCU, COLETA DE SABATA — Considerații asupra parametrilor care determină lungimea de parcurs la insolatoarele plane în regim dinamic 63

COLETA DE SABATA, C. MARCU — Influența formei și dimensiunilor celulei de captare a energiei solare cu inoslatoare plane în regim dinamic 67

MARIA BOLDAN, D. POPOV — Considerații teoretice și verificări experimentale asupra procesului de uscare a lemnului 69

BULETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Tome 24 (38) **Fascicule 1** **Juillet-Decembre 1979**

MATHEMATIQUE—PHYSIQUE

CARMENCITA UROSU — Produits associés an produit direct dans une classe équationelle. 8

E. OLARU, GH. SUCIU — α — Kritische Hamiltonschen Graphen 15

DORINA RENDI, B. RENDI — Sur quelques proprietés du groupe SO (n) 21

DORINA RENDI, B. RENDI — Sur les limites diréctes d'algébres 25

CARMENCITA UROSU — Translations sur les Ω — algébres 28

P. NASLAU — On a integro-differential equation 33

IOSEFINA MIHUŢ — Cohomologie d-une variété analytique complexe feuilletée à coefficients dans un faisceau des germes des formes feuilletées 36

IOSEFINA MIHUŢ — On the existence of foliate differential operators on foliateü complex analytic manifolds 39

ELENA TOPUZU, P. TOPUZU — On the controllability liniar systems in Banach spaces 44

M. NEAGU — Transformations gènèrales des familles composables 50

F. KLEPP, M. MORARU, E. SCHULLER — Zwei eindimensionelle Suchoptimierungsverfahren mit Anwendung in der Chemie und ihre Programmierung am FELIX C-256 Computer 55

DORINA RENDI, B. RENDI — Structures différentialles sur des espaces métriques convexes 59

RADA BAEA — Recherches expérimentaux sur l'effet Guillemin invers 62

C. MARCU, COLETA DE SABATA — Considérations concernand les paramètres determinand la longueur du traject pour un captateur 66

COLETA DE SABATA, C. MARCU — L'influence de la forme et des dimensions d'un captateur solaire plan destiné à fonctionner en régime dynamique 68

MARIA BOLDAN, D. POPOV — Considérations théoriques et vérifications éxperimentalles sur le processus de séchage du bois 72

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) Fascicola 1 —1979

PRODUSE ASOCIATE PRODUSULUI DIRECT ÎNTR-O CLASĂ ECUAŢIONALĂ

DE

CARMENCITA UROŞU

Într-o clasă ecuaţională $\mathcal{K}$ de algebre universale de tipul τ se pot construi noi algebre, care aparţin clasei $\mathcal{K}$, cu ajutorul subalgebrelor sau imaginilor omomorfe ale unui produs direct de algebre din $\mathcal{K}$.

Fie $\mathcal{U}_i = <A_i, F>$, $i \in I$, algebre dintr-o clasă ecuaţională $\mathcal{K}$. Considerăm algebra $\pi\,(U_i/i \in I)$ şi $B \leqslant \pi\,(A_i' i \in I)$. În [1] este definit produsul direct slab al unei familii de algebre similare :

Definiţie. Algebra $\mathfrak{B} = <B, F>$ din clasa $\mathcal{K}$, se numeşte produs direct slab al algebrelor $\mathcal{U}_i$ dacă sînt satisfăcăte următoarele condiţii :

(i) $\mathfrak{B}$ este o subalgebră a algebrei $\pi\,(\mathcal{U}_i/i \in I)$

(ii) $f, g \in B$ implică faptul că $\{i/f(i) \neq g(i)\}$ este o submulţime finită a lui I,

(iii) dacă $f \in B$, $g \in \pi\,(A_i/i \in I)$ şi $\{i/f(i) \neq g(i)\}$ este finită, atunci $g \in B$.

Următaorea teoremă dă o condiţie necesară şi suficientă ca produsul direct slab să existe :

Teorema I. Un produs direct slab al algebrelor $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, din clasa ecuaţională $\mathcal{K}$, există d. şi n.d. există un element $p \in \pi\,(A_i/i \in I)$ astfel ca pentru fiecare $\gamma < 0\ (\tau)$, mulţimea $\{i/p(i) \neq f(p(i), \ldots, p(i))\}$ este finită.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{B} = <B ; F>$ un produs direct slab al algebrelor $\mathcal{U}_i$, $i \in I$ din clasa $\mathcal{K}$. Deci elementele algebrei $\mathfrak{B}$ diferă printr-un număr finit de componente. De aici rezultă că algebra $\mathfrak{B}$ conţine cel puţin un element $p \in \pi\,(A_i/i \in I)$ şi conform $(i) : f_\gamma(p_i), \ldots, p(i)) \in \mathfrak{B}$ pentru $\forall \gamma < 0\ (\tau)$. Conform (ii) mulţimea $\{i/p(i) \neq f(p(i), \ldots, p(i))$ este finită.

Reciproc, fie un element $p \in \pi\,(A_i/i \in I)$ care are proprietatea din enunţ. Fie $S = \{p\} \cup \{q/q \in \pi\,(A_i.\ i \in I)$ şi $\{i/p(i) \neq q(i)$ finită$\}$. Subalgebra $\mathfrak{S}$ generată de mulţimea S în laticea completă a subalgebrelor produsului direct $\pi\,(\mathcal{U}_i/i \in I)$ este un produs direct slab al algebrelor $\mathcal{U}_i$, $i \in I$./

O generalizare a produsului direct slab a fost dată de J. Hashimoto, In [2]: pentru o familie de algebre $\mathcal{U}_i = <A_i ; F>$, $i \in I$ dintr-o clasă ecuaţională $\mathcal{K}$, se defineşte produsul direct I — restrîns : $\mathfrak{B} = \pi^L(\mathcal{U}_i/i \in I)$.

Fie L un ideal al algebrei Boole : $\mathfrak{B}(I) = <P(I) ; \cup, \cap, ', \emptyset, I>$ şi $B \subseteq \subseteq \pi(A_i/i \in I)$,

Definiţia 2. Algebra $\mathfrak{B} = <B ; F>$ se numeşte produsul direct L — restrîns al algebrelor $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :

(i) $\mathfrak{B}$ este o subalgebră a algebrei $\pi\,(\mathcal{U}_i/i \in I)$

(ii) $g, f \in \mathfrak{B}$ implică faptul că $\{i/f(i) \neq g(i)\} \in L$

(iii) $f \in \mathfrak{B}$ şi $g \in \pi\,(\mathcal{U}_i/i \in I)$ astfel că mulţimea : $\{i/f(i) \neq g(i)\} \in L$ implică $g \in \mathfrak{B}$./

Observaţii : *a*) Dacă L este idealul tuturor submulţimilor finite ale mulţimii I, definiţia 2 coincide cu definiţia I.

b) Dacă $L=P(I)$, are loc izomorfismul : $\pi(\mathfrak{A}_i'/i\in I)\cong\pi^L(\mathfrak{A}_i/i\in I)$.

c) Dacă $L=\{\emptyset\}$, produsul direct L – restrîns este o algebră cu un singur element : $\pi^L(\mathfrak{A}_i/i\in I)=I$.

Are loc o teoremă analoagă teoremei I :

Teorema 2. Un produs direct L – restrîns al algebrelor $\mathfrak{A}_i$, $i\in I$ din clasa ecuațională $\mathfrak{K}$ există d. și n.d. există un element $p\in\pi(A_i, i\in I)$ astfel ca pe pentru fiecare $\gamma<0(\tau)$, să fie îndeplinită condiția :

$$\{i/p(i)\neq f(p(i),\ldots,p(i))\}\in L./$$

Definiția 3. Pentru un ideal $J\subseteq L$ se definește o relație de congruență pe algebra $\pi^L(\mathfrak{A}_i/i\in I)$ prin condiția :

$$f\equiv g(\theta)\gamma) \quad <=>\{i/f(i)\neq g(i)\}\in J./$$

Observații : *a*) Fie θ_i $i\in I$, relații de congruență pe algebra $\pi^L(\mathfrak{A}_i/i\in I)$, induse de omomorfismele de proiecție $e_i^I : f\Leftrightarrow g(\theta_i)<=>f(i)=g(i)$ Conform [1], sublaticea completă $<\Sigma, \subseteq>$ a laticei $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$, generată de congruențele θ_i, constă din congruențele θ^J cu $J\subseteq L$. Deci corespondența $J\to\theta^J$ este un izomorfism între $J(\mathfrak{L})$ și $<\Sigma ; \subseteq>$, unde $\mathfrak{L}=<L, \subseteq>$.

b) Conform definiției 3 au loc relațiile $\theta^{(\Phi)}=\omega$ și $\theta^L=\tau./$

Fie L un ideal al laticei $\mathfrak{B}(I)$ și considerăm congruența θ_L pe algebra $\pi(\mathfrak{A}_i/i\in I)$ definită astfel :

$$f\equiv g(\theta_L)\Leftrightarrow\{i/f(i)\neq g(i)\}\in L.$$

Definiția 4. Algebra cît $\pi(\mathfrak{A}_i/i\in I)/\theta_L$ se numește produs direct L – redus al algebrelor $\mathfrak{A}_i$ din clasa ecuațională $\mathfrak{K}./$ Vom nota această algebră cu $\pi_L(\mathfrak{A}_i/i\in I)$.

Lema 1. Dacă $\theta_i\in\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i)$, $i\in I$, și definim relația notată $\pi_L(\theta_i/i\in I)$ pe algebra $\pi_L(\mathfrak{A}_i/i\in I)$ prin :

$$f\equiv g(\pi_L(\theta_i/i\in I))\Leftrightarrow\{i/f(i)\neq g(i)\ (\theta_i)\}\in L,$$

atunci aceasta este o relație de congruență.

Demonstrație. Proprietatea de reflexivitate are loc deoarece :

$$f\equiv f(\pi_L(\theta_i/i\in I))\Leftrightarrow\{i/f(i)\neq f(i)(\theta i)\}=\Phi\in L.$$

Relația definită este evident simetrică iar tranzitivitatea rezultă din relația :

$$\{i/f(i)\neq h(i)\ (\theta_i)\}\subseteq\{i/f(i)\neq g(i)\ (\theta_i)\}\cup\{i/g(i)\neq h(i)(\theta_i)\}\in L.$$

Pentru a verifica proprietatea de compatibilitate cu operațiile din F, fie $g_K\equiv h_k(\pi_L(\theta_i/i\in I))$, $k=0,\ldots,n_\gamma-1$, $\gamma<0(\tau)$. Are loc condiția :
$\{i/f_\gamma(h_0,\ldots,h_{n\gamma-1})(i)\not\equiv f_\gamma(g_0,\ldots,g_{n\gamma-1})(i)(\theta_i)\subseteq U\{i/h_k(i)\not\equiv g_k(i)(\theta_i/k=0,\ldots,n_\gamma-1\}\in L$ și deci relația $\pi_L(\theta_i/i\in I)$ este o congruență pe $\pi_L(\mathfrak{A}_i/i\in I)./$

Lema 2. Dacă $L=\{X/X\subseteq A\}$, $A\subseteq I$ este un ideal principal al laticei $\mathfrak{B}(I)$, atunci pentru $f\in\pi(\mathfrak{A}_i/i\in I)$, corespondența :

$\psi : [f]\theta_L\to f_{I-A}$ este un izomorfism între algebrele : $\pi_L(\mathfrak{A}_i/i\in I)$ și $\pi(\mathfrak{A}_i/i\in I/A)./$

Fie L un ideal al laticei Boole $\mathfrak{B}(I)$ și $\mathfrak{D}=\{X/I-X\in L\}$. Atunci $\mathfrak{D}$ este un ideal dual în $\mathfrak{B}(I)$ și relația $\theta_\mathfrak{D}$ pe algebra $\pi(\mathfrak{A}_i/i\in I)$ definită prin :

$f\equiv g(\theta_\mathfrak{D})\Leftrightarrow\{i/f(i)=g(i)\}\in\mathfrak{D}$ este o relație de congruență. $\theta_\mathfrak{D}$ coincide cu θ_L iar algebra cît $\pi(\mathfrak{A}_i/i\in I)/\theta_\mathfrak{D}=\pi_\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_i/i\in I)$ coincide cu cea din definiția 4. Vom stabili o legătură între algebra $\pi_\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_i/i\in I)$ și $\varinjlim\mathfrak{A}$ unde $\mathfrak{A}$ este familia directă a algebrelor $\mathfrak{A}_i$.

Fie $\mathcal{A}$ o familie directă de algebre $\mathfrak{A}_i$ din clasa ecuațională, avînd suportul mulțimea dirijată la dreapta $<I, \leqslant>$. Considerăm $B \subseteq \pi(A_i/i \in I)$ definită prin condiția: $f \in B \Leftrightarrow Jk \in I$ astfel ca pentru $\forall i, j \in I$ și $k \leqslant i \leqslant j$, să avem $f(i)\varphi_{ij} = F(j)$, unde φ_{ij} sînt omomorfismele care definesc familia directă de algebre.

Teorema 3. $\mathfrak{B} = <B, F>$ este o subalgebră a produsului direct $\pi\mathfrak{A}_i/i \in I)$

Demonstrație. Fie $F_\gamma \in F$, $\gamma < 0$ (τ) și $f_h \in B$, $h = 0, \ldots, n_\gamma - 1$. Deci există $k_h \in I$ și $\forall i_h, j_h$ astfel ca $k_h \leqslant i_h \leqslant j_h$, are loc relația:

$$f_h(i_h)\varphi_{i_h j_h} = f(j_h).$$

Vom arăta că $f_\gamma(f_0, \ldots, fn_\gamma - 1) \in B$, $\forall \gamma < 0$ (τ). Deoarece operația f_γ se aplică pe componente, are loc relația:

$$f_\gamma(f_0, \ldots, f_{n\gamma-1})(1) = f_\gamma(f_0(1), \ldots, f_{n\gamma-1}(1)) \in Al,\ 1 \in I.$$

Dacă k este o margine superioară pentru $k_h \in I$, $h = O, \overline{n_\gamma - 1}$, atunci pentru $\forall i, j \in I$ și $k \leqslant i \leqslant j$ avem: $f_\gamma(f_0, \ldots, f_{n\gamma-1})(i)\varphi_{ij} = f_\gamma(f_0, \ldots, f_{n\gamma-1})(i)$ deoarece $f_\gamma(f_0(i), \ldots, f_{n\gamma-1}(i))\varphi_{ij} = f_\gamma(f_0(i)\varphi_{ij}, \ldots, f_{n\gamma-1}(i)\varphi_{ij}) = f_\gamma(f_0(j), \ldots, f_{n\gamma-1}(j)) = f_\gamma(f_0, \ldots, f_{n\gamma-1})(j)$. Deci $\mathfrak{B}$ este o subalgebră a algebrei $\pi(\mathfrak{A}_i/i \in I)$

Teorema 4. Dacă θ este o relație pe algebra $\mathfrak{B}$, definită prin condiția: $f \equiv g(\theta) \Leftrightarrow i \in I$ și $f(j) = g(j)$ pentru orice $j \geqslant i$, atunci

(*i*) θ este o relație de congruență pe algebra $\mathfrak{B}$ și

(*ii*) algebra $\mathfrak{B}/\theta$ este izomorfă cu $\varinjlim \mathcal{A}$.

Demonstrație. (*i*) Proprietatea de reflexivitate și simetrie este evident verificată. Dacă $f \equiv g(\theta)$ și $g \equiv h(\theta)$ rezultă că există $i \in I$ și $f(j) \equiv g(j)$ pentru orice $j \geqslant i$ și $\exists k \in I$ astfel ca $g(m) = h(m)$, $\forall m \geqslant k$. Mulțimea $<I, \leqslant>$ fiind dirijată la dreapta, există $n \in I$ și $i \leqslant n$, $k \leqslant n$ Deci: $f(1) = g(1) = h(1)$, $\forall 1 \geqslant n$ și deci θ este tranzitivă.

Dacă $f_\gamma \in F$, $\gamma < 0$ (τ) și $f_k \equiv g_k(\theta)$, $k = \overline{0, n_{\gamma-1}}$, avem satisfăcută condiția: $\exists i_k \in I$ și $f_k(j_k) = g_k(j_k)$, $\forall j_k \geqslant i_k$. Fie m o margine superioară a mulțimii $\{i_k\}_k = \overline{0, n_{\gamma-1}}$ Avem:

$f_\gamma(f_0, \ldots, f_{n\gamma-1}) \equiv f_\gamma(g_0, \ldots, g_{n\gamma-1})(\theta)$ deoarece există $m \in I$ și $f_\gamma(f_0, \ldots, f_{n\gamma-1})(j) = f_\gamma(f_0)(j), \ldots, f_{n\gamma-1}(j)) \equiv f_\gamma(g_0(j), \ldots, g_{n\gamma-1}(j)) f_\gamma g_0 \cdots \ldots, g_{n\gamma-1}(j))$, $\forall j \geqslant m$.

Deci are loc compatibilitatea relației θ cu operațiile din F și θ este o relație de congruență.

(*ii*) Fie $\widehat{f} \in \mathfrak{B}/\theta$. Clasa cu reprezentantul $f \in \mathfrak{B}$ este formată din toate elementele algebrei $\mathfrak{B}$ care au proprietatea că există un indice $k \in I$ începînd de la care toate componentele lor coincid.

Algebra $\varinjlim \mathcal{A}$ este algebra cît $\bigcup (A_i/i \in I)/\rho$ unde ρ se definește prin condiția:

$a_i \leqslant a_j(\rho)$, $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j \Leftrightarrow \exists k \in I$ și $i \leqslant k$, $j \leqslant k$ astfel ca, $a_i\varphi_{ik} = a_j\varphi_{jk} = z$.

Operațiile $f_\gamma \in F$ se definesc astfel: dacă $a_j \in A_{j_t}$, $0 \leqslant j < n_\gamma$, $f_\gamma \in F$, $\gamma < 0$ $\tau)$ și m este o margine superioară a mulțimii indicilor i_j, $0 \leqslant j < n_\gamma$, atunci:

$\widehat{f_\gamma}(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n\gamma-1}}) = \widehat{f_\gamma}(a_0', \ldots, a_{n\gamma-1}')$ unde $a_j' = a_j\varphi_{ij}m$. Dacă $\widehat{f_t} \in \mathfrak{B}/\theta$ și $\widehat{z_t} \in \varinjlim \mathcal{A}$, $i = 0, \ldots, n_\gamma - 1$, astfel că $(\widehat{f_t})\varphi = \widehat{z_t}$, atunci rezultă:

$\widehat{f_\gamma}(f_0, \ldots, f_{n\gamma-1})\varphi = \widehat{f_\gamma}\, z_0, \ldots, z_{n\gamma-1})$ și deci $f_\gamma(\widehat{f_0}, \ldots, \widehat{f_{n\gamma-1}})\varphi = f_\gamma(\widehat{z_0} \ldots, \ldots, \widehat{z_{n\gamma-1}})$. Corespondența $\widehat{f} \to \widehat{z}$ este un izomorfism între algebrele $\mathfrak{B}/\theta$ și $\varinjlim \mathcal{A}$.

Deoarece algebra $\mathfrak{B}/\theta$ aparține clasei ecuaționale $\mathfrak{K}$, are loc următorul corolar

Corolar. Orice clasă ecuațională este închisă față de limitele directe : $L(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{K}$./

Teorema 5. Fiecare algebră dintr-o clasă ecuațională este izomorfă cu o limită directă a algebrelor finit generate.

Demonstrație. Fie $\mathfrak{U} \in \mathfrak{K}$ și definim mulțimea I prin : $B \in I \Leftrightarrow <B, F>$ este o subalgebră finit generată a algebrei $\mathfrak{U}$. Atunci $<I ; \subseteq>$ esteo mulțime parțial ordonată, dirijată la dreapta. Algebrele $\mathfrak{U}_i$ sînt definite ca fiind $<i ; F>$ iar φ_{ij} $(i \leqslant j)$ este omomorfismul identic. Deci am definit o familie directă $\mathfrak{A}$ de algebre și avem : $\lim \mathfrak{A} \cong \mathfrak{U}$./

Fie $(\mathfrak{U}_i, i \in I)$ o familie de algebre din clasa ecuațională $\mathfrak{K}$ și $\mathfrak{D}$ un ideal dual al algebrei boole $\mathfrak{B}(I)$. Pentru $H \in \mathfrak{D}$, considerăm algebra : $\mathfrak{B}_H = \pi (\mathfrak{U}_i / i \in H)$ și pentru $H, K \in \mathfrak{D}$, $H \geqslant K$, fie φ_{HK} omomorfismul natural al algebrei $\mathfrak{B}_H$ pe $\mathfrak{B}_K$. Are loc următoarea teoremă :

Teorema 6. Algebrele $\mathfrak{B}_H$ cu omomorfismele φ_{HK} formează o familie directă $\mathfrak{A}$ cu suportul $<\mathfrak{D}, \supseteq>$ și are loc izomorfismul :

$$\lim_{\rightarrow} \mathfrak{A} \cong \pi_{\mathfrak{D}} (\mathfrak{U}_i / i \in I).$$

Demonstrație. Algebrele $\mathfrak{B}_H$ formează o familie directă $\mathfrak{A}$ de algebre în $\mathfrak{K}$;

I) Mulțimea $<\mathfrak{D}, \supset>$ este dirijată la dreapta : dacă $H., K \in \mathfrak{D}$ rezultă că $H \cap K \in \mathfrak{D}$, fiind ideal dual și deci $H \supseteq H \cap K$, $K \supseteq H \cap K$

2) $\mathfrak{B}_H$ sînt algebre cu $H \in \mathfrak{D}$

3) φ_{HK} sînt omomorfismele naturale de la $\mathfrak{B}_H$ pe $\mathfrak{B}_K$ cînd $H \supseteq K$ iar φ_{HK} este omomorfismul identic al algebrei $\mathfrak{B}_H$.

Algebra $\lim_{\rightarrow} \mathfrak{A}$ se definește astfel : fie $\bigcup (\mathfrak{B}_H)$ unde $\mathfrak{B}_H = \pi (\mathfrak{U}_i / i \in H)$ și $x \in \mathfrak{B}_H$, $y \in \mathfrak{B}_K$, atunci $x \equiv y (\theta) \Leftrightarrow \exists U \in \mathfrak{D}$ și $H \geqslant U$, $K \geqslant U$ astfel ca $x\varphi_{HU} = y\varphi_{KU} = z \in \mathfrak{B}_U$. Mulțimea cît : $\bigcup_{H \in \mathfrak{D}} (\mathfrak{B}_H)/\theta$ este algebra $\lim_{\rightarrow} \mathfrak{A}$.

Deoarece $f \equiv g (\theta_{\mathfrak{D}}) \Leftrightarrow \{i / f(i) = g(i)\} \in \mathfrak{D}$, corespondența $[x]\theta \rightarrow [f]\theta_{\mathfrak{D}}$ este un izomorfism între algebrele $\lim_{\rightarrow} \mathfrak{A}$ și $\pi_{\mathfrak{D}} (\mathfrak{U}_i / i \in I)$./

BIBLIOGRAFIE

1. G. Grätzer : Universal algebra, I, ed. Princeton, 1968.
2. J. Hashimoto : Direct, subdirect decompositions and congruence relations, Osaka Math. J. 9 (1957), 87—112.
3. Pierce R. S. : Introduction to the theory of abstract algebras, I ed. New York, 1968.

PRODUITS ASSOCIÉS AU PRODUIT DIRECT DANS UNE CLASSE EQUATIONALE

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage sont étudiées quelques algèbres construites à l'aide des subalgébres au des images omomorphes des produits directes dans une classe équationale.

On établit une liason entre les limites directes d'une famille directe d'algèbres du $\mathfrak{K}$ et les produits directes $\mathfrak{D}$-reduits avec un ideal dual de l'algèbre $\mathfrak{B}(I)$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 22 (39) **Fascicola 1—1979**

GRAFURI HAMILTONIENE α – CRITICE*)

DE
E. OLARU, GH. SUCIU

În lucrarea de faţă se consideră grafuri simple (finite, neorientate, fără bucle şi fără muchii multiple) $G=(X, U)$, unde X este mulţimea vîrfurilor, iar U reprezintă mulţimea muchiilor grafului G. De asemenea notăm cu $\bar{G}$ complementarul grafului G, iar prin $\alpha(G)$, $\chi(G)$, $\omega(G)=\alpha(\bar{G})$, $\nu(G)=\chi(\bar{G})$ desemnăm numărul de stabilitate, numărul cromatic, densitatea şi respectiv numărul de acoperire cu clici al grafului G. Subgraful generat (secţionat) de o mulţime de vîrfuri $A\subseteq X$ va fi redat prin notaţia G_A.

Definiţia 1. O muchie $u\in U$ se numeşte α – critică în raport cu graful G, dacă are loc relaţia

$$\alpha(G-u)=\alpha(G)+1,$$

unde am notat cu $G-u$ graful parţial $(X, U-\{u\})$ al grafului G.

Definiţia 2. Numim ciclu hamiltonian α–critic (pe scurt h–α-critic) al unui graf H, un ciclu hamiltonian, avînd proprietatea că toate muchiile sale sînt α–critice în raport cu H. În acest caz H va fi numit graf hamiltonian α–critic.

O clasă foarte importantă de grafuri care a stîrnit interesul multor matematicieni şi care a constituit obiectul multor lucrări de mare actualitate, este aceea a grafurilor perfecte.

Definiţia 3. Un graf $G=(X, U)$ se numeşte α–perfect, dacă pentru orice mulţime de fîrvuri $A\subseteq X$ are loc relaţia:

$$\nu(G_A)=\alpha(G_A),$$

iar dacă

$$\chi(G_A)=\omega(G_A),$$

atunci G se numeşte χ-perfect. G se numeşte graf perfect, dacă este simultan α–perfect şi χ–perfect.

(Pentru un graf oarecare G au loc în general relaţiile $\alpha(G)\leqslant\nu(G)$ şi $\omega(G)\leqslant\chi(G)$).

Sînt cunoscute două caracterizări ale grafurilor perfecte (vezi [1], [2], [4]), dar nici una dintre acestea nu dau o caracterizare structurală. Există în acest sens o conjectură (vezi, de exemplu, [3]), cunoscută în literautra de specialitate sub numele de „Conjectura tare" a grafurilor perfecte:

---

* Comunicat la „Simpozionul de matematică modernă aplicată la rezolvarea problemelor din industrie şi economie" din ziua de 3 iunie 1978. I. P. „Traian Vuia" din Timişoara.

Conjectura 1. (Berge-Gilmore) Un graf G este atunci și numai atunci perfect, cînd G nu conține orificii impare, adică G nu conține nici o mulțime de vîrfuri A așa fel încît G_A sau $\bar{G}_A$ să fie un ciclu elementar de lungime impară mai mare ca trei.

În [5] a fost introdusă noțiunea de orificiu $\alpha-$critic (vezi definiția 4) care este un graf cu o structură mai slabă decît aceea a orificiilor impare cerute în conjectura 1 și s-a arătat că grafurile perfecte nu admit astfel de structură ca subgraf, făcîndu-se totodată următoarea conjectură :

Conjectura 2. Un graf G este perfect dacă și numai dacă el nu conține orificii $\alpha-$critice.

Definiția 4. Numim orificiu $\alpha-$critic al grafului H un subgraf G al lui H cu proprietățile :

(*i*) G este hamiltonian $\alpha-$critic ;

(*ii*) $\alpha(G)\geqslant 2$.

Un orificiu $\alpha-$critic se numește minimal, dacă nu conține nici un subgraf propriu care este orificiu $\alpha-$critic.

Evident, orice orificiu $\alpha-$critic conține cel puțin un orificiu $\alpha-$critic minimal.

Este demn de remarcat faptul că în conjectura 2, prin intermediul grafurilor hamiltonian $\alpha-$critic, se face apel numai la structura grafului G, fără a mai fi necesar un studiu simultan asupra grafului complementar, ceea ce este, după părerea noastră, un real avantaj.

Avînd în vedere acest lucru, considerăm că se impune cercetarea proprietăților grafurilor $h-\alpha-$critice, proprietăți care să permită în cele din urmă caracterizarea lor structurală.

În lucrarea de față ne ocupăm de grafurile hamiltoniene $\alpha-$critice, în general, și demonstrăm o serie de proprietăți ale orificiilor $\alpha-$critice, în special.

Propoziția 1. Dacă $G=(X, U)$ este un graf hamiltonian $\alpha-$critic, atunci nu există nici o descompunere a lui G în două subgrafuri G_A și G_B (A, $B\neq\emptyset$, $A\cap B\neq\emptyset$, $A\cup B=X$) astfel încît

$$\alpha(G_A)+\alpha(G_B)=\alpha(G). \tag{1}$$

Demonstrație. Notăm $\alpha(G_A)=k$, $\alpha(G_B)=k_2$ și $\alpha(G)=k$. Din faptul că G este presupus $h-\alpha-$critic rezultă că există cel puțin o muchie $u=(x, y)$ cu $x\in A$ și $y\in B$ și $\alpha(G-u)=k+1$, unde u aparține ciclului hamiltonian, $\alpha-$critic, a cărui existență este asigurată prin definiție.

Prin urmare, deducem de aici existența unei mulțimi stabile $\bar{S}$ în graful $G-u$ cu x, $y\in\bar{S}$ și avînd $|\bar{S}|=k+1$ elemente. Dacă notăm $S_1=\bar{S}\cap A$ și $|S_1|=t$, atunci mulțimea $\bar{S}-S_1\subset B$ este stabilă în graful G_B și are $|\bar{S}-S_1|=k+1-t$ elemente. Rezultă că $\alpha(G_A)\geqslant t$, $\alpha(G_B)\geqslant k+1-t$, ceea ce implică faptul că

$$\alpha(G_A)+\alpha(G_B.)\geqslant k+1>\alpha(G).$$

Acest ultim rezultat dovedește că relația din enunț nu poate avea loc.

Propoziția 2. Dacă graful G este hamiltonian $\alpha-$critic, iar Q este o clică oarecare a sa, atunci are loc relația

$$\alpha(G-Q)=\alpha(G). \tag{1}$$

Demonstrație. Fie $A\subseteq X$ astfel încît subgraful $G_A=Q$ să fie o clică a grafului G (adică Q este graf complet) și fie $G_B=G_{X-A}=G-Q$.

Avem evident

$$\alpha(Q)=1\ ;\ \alpha(G-Q)\leqslant\alpha(G),$$

(deoarece $G-Q$ este subgraf secționat al grafului G), iar din propoziția 1 deducem că

$$\alpha(G_A)+\alpha(G_B)=\alpha(Q)+\alpha(G-Q)\geqslant\alpha(G)+1,$$

sau

$$\alpha(G-Q)\geqslant\alpha(G),$$

de unde rezultă relația (1) din enunț.

Teorema 1. Un graf hamiltonian $\alpha-$critic este atunci și numai atunci $\alpha-$decompozabil (adică $\nu(G)=\alpha(G)$), cînd G este graf complet.

Demonstrație. Într-adevăr, un graf complet (care este evident și $h-\alpha-$critic) este $\alpha-$decompozabil deoarece $\alpha(G)=\nu(G)=1$.

Invers, să presupunem că ar exista un graf $G=(X, U)$ care este în același timp $h-\alpha-$critic și $\alpha-$decompozabil.

Din ultima ipoteză rezultă existența unei descompuneri

$\{X, X, \ldots, X_k\}$ $(X_i\neq\emptyset, \bigcup_{i=1}^{k} X_i=X, X_i\cap X_j=\emptyset; i\neq j, i, j=1, 2, \ldots, k)$ a

mulțimii de vîrfuri X, astfel încît subgrafurile $G_{Xi}=Q_i$ $(i=1, 2, \ldots k)$ sînt clici, iar $k=\alpha(G)$.

Dacă $k=1$, atunci $G=Q$, adică G este graf complet și teorema ar fi demonstrată.

Presupunerea $k>1$ este absurdă deoarece, în acest caz, considerînd descompunerea grafului G în subgrafurile Q_1 și $G-Q_1$ $(\neq\emptyset)$ avem

$$\alpha(Q)+\alpha(G-Q)=1+k-1=\alpha(G),$$

ceea ce contrazice afirmația din propoziția 1.

Cu aceasta, teorema 1 este demonstrată.

Acest ultim rezultat ne permite să considerăm în continuare numai grafuri H cu $\alpha(H)\geqslant 2$.

Consecința 1. Un orificiu $\alpha-$critic nu este $\alpha-$decompozabil.

Consecința 2. Un graf perfect nu conține orificii $\alpha-$critice.

În [5] s-a demonstrat următoarea teoremă, de care vom face uz în continuare :

Teorema 2. Un graf H conține atunci și numai atunci un ciclu impar, fără corzi, de lungime mai mare ca trei, cînd există în H două muchii (x^1, x) și (x, x^2) cu proprietățile :

(i) (x^1, x) și (x, x^2) sînt $\alpha-$critice în raport cu un subgraf G al lui H ;

(ii) $(x^1, x^2)\notin H$.

Dacă H satisface condițiile de mai sus, atunci există în H un ciclu impar fără corzi de lungime mai mare ca trei care conține muchiile (x^1, x) și (x, x^2).

În continuare folosim denumirea de orificiu $\alpha-$critic și pentru grafurile $h-\alpha-$critic. H cu $\alpha(H)\geqslant 2$, adică și pentru cazul cînd în definiția 4 avem $G=H$.

Teorema 3. Un orificiu $\alpha-$critic minimal G este atunci și numai atunci un orificiu impar, cînd $\alpha(G)=2$ sau $\omega(G)=2$.

Demonstrație. 1) Fie L_{2k+1} $(k\geqslant 2)$ un orificiu impar. Atunci, conform definiției, L_{2k+1} sau $\bar{L}_{2k+1}$ este un ciclu elementar de lungime impară $2k+1$ $(k\geqslant 2)$. Dacă L_{2k+1} este ciclu elementar impar, atunci evident L_{2k+1} este $h-\alpha-$critic cu $\omega(L_{2k+1})=2$. Presupunem că $\bar{L}_{2k+1}$ este un ciclu elementar de lungime $2k+1$ $(k\geqslant 2)$, avînd vîrfurile $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$ și muchiile $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{2k+1}, x_1)$.

În L_{2k+1} există ciclul

$$C=(x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k+1}, x_2, x_4, \ldots, x_{2k-2}, x_{2k}, x_1)$$

Care este hamiltonian $\alpha-$critic deoarece:

$\alpha(L_{2k+1})=\omega(L_{2k+1})=2$ și

$\alpha(L_{2k+1}-(x_{2p-1}, x_{2p+1}))=3$, $(p=1, 2, \ldots, k)$,

$\alpha(L_{2k+1}-(x_{2r}, x_{2r+2}))=3$, $(r=1, 2, \ldots k-1)$;

$\alpha(L_{2k+1}-(x_{2k+1}, x_2))=3$;

$\alpha(L_{2k+1}-(x_{2k}, x_1))=3$

întrucît mulțimile

$\{x_{2p-1}, x_{2p}, x_{2p+1}\}$ $(p=1, 2, \ldots, k)$, $\{x_{2r}, x_{2r+1}, x_{2r+1}\}$ $(r=1, 2, \ldots, k-1)$,

$\{x_{2k+1}, x_1, x_2\}$ și $\{x_{2k}, x_{2k+1}, x_1\}$

sînt evident mulțimi stabile în graful L_{2k+1}

2) Fie G un orificiu $\alpha-$critic minimal cu densitatea $\omega(G)=2$. Din definiția 2 rezultă că el conține un ciclu hamiltonian $\alpha-$critic. Considerăm trei vîrfuri consecutive x^1, x, x^2 situate pe acest ciclu. Atunci avem:

$$\alpha(G-(x, x^i))=\alpha(G)+1 \quad (i=1, 2)$$

și deoarece $\omega(G)=2$ rezultă că $(x^1, x^2)\notin G$.

Din teorema 2 deducem existența unui orificiu impar L_{2k+1} $(k\geqslant 2)$ în graful G. Ipoteza de minimalitate a lui G implică egalitatea $G=L_{2k+1}$, ceea ce înseamnă că, în acest caz, afirmația din teorema 3 este adevărată.

3) Presupunem acum că G este un orificiu $\alpha-$critic cu numărul de stabilitate $\alpha(G)=2$ (și $\omega(G)\geqslant 2$).

Distingem următoarele două posibilități:

a) $\bar{G}$ conține un orificiu impar L_{2k+1} $(k\geqslant 2)$.

În această situație graful G conține subgraful $\bar{L}_{2k+1}$ care, conform celor arătate la punctul 1), este un orificiu $\alpha-$critic, iar G, fiind minimal, coincide cu aceasta;

b) $\bar{G}$ nu conține orificii impare.

De aici și din ipoteza $\omega(\bar{G})=2$ deducem faptul că $\bar{G}$ nu conține cicluri impare, adică $\bar{G}$ este graf par. Prin urmare, numărul cromatic $\chi(\bar{G})$ este egal cu 2, iar egalitatea $2=\chi(\bar{G})=\omega(\bar{G})$, echivalentă cu $\nu(G)=\alpha(G)$, arată că graful G este $\alpha-$decompozabil. Acest lucru contrazice însă afirmația din consecința 1 a, teoremei 1.

Observații 1. Fie G un orificiu $\alpha-$critic, iar $C=(x_1, x_2 \ldots x_n)$ un ciclu hamiltonian $\alpha-$critic în raport cu G (a cărui existență decurge din definiție) Atunci avem:

(1) $G=C$ sau

(2) G conține muchiile (x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5), $\ldots$, $x_{n-2}, x_n)$, (x_{n-1}, x_1) (x_n, x_2).

Dacă G nu ar conține una din muchiile indicate, de exemplu (x_{2k-1}, x_{2k+1}), atunci, conform teoremei 2, G conține un orificiu impar, trecînd prin vîrfurile x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}, care, în baza teoremei 3, este orificiu $\alpha-$critic. Din cauză că G este minimal rezultă că G coincide cu acest ciclu și deci $G=C$.

2) Se poate verifica ușor că pentru un orificiu α – critic minimal $G=(X, \cup)$ avem :

a) $|X| \geqslant 5$;

b) Dacă $|X|=5$, din observația 1) rezultă că $G=C_5$;

c) $|X| \neq 6$;

d) Dacă $|X|=7$, atunci sau $G=C_7$ sau $\alpha(G)=2$, ceea ce, conform teoremei 3, implică $G=\bar{C}_7$.

3) Avînd în vedere conjectura grafurilor perfecte, se poate presupune că orificiile α – critice minimale și orificiile impare coincid, ceea ce ne conduce la următoarea

Conjectură 3. Fie G un orificiu α – critic minimal, iar C ciclul său $h-\alpha$ – critic, atunci relația $G \neq C$ implică relația $\alpha(G)=2$.

Teorema 4. Dacă graful $G=(X, U)$ este un orificiu α – critic minimal, atunci orice vîrf x al lui G aparține unui ciclu impar (avînd lungimea mai mare ca trei) care are cel mult o coardă ; dacă coarda există, atunci ea împreună cu x aparțin unei aceleași clici.

Demonstrație. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vîrfurile grafului G astfel numerotate încît $x_1=x$, iar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este ciclul $h-\alpha$ – critic al grafului G, adică avem $(x_i, x_{i+1}) \in U$;

$$\alpha(G-(x_i, x_{i+1}))=\alpha(G)+1, \ (i=1, 2, \ldots, n ; x_{n+1}=x_1). \tag{2}$$

Presupunem că afirmația din enunț nu este adevărată. În acest caz arătăm, prin inducție în raport cu i, că

$$(x, x_i) \in U ;$$

$$\alpha(G-(x, x_i))=\alpha(G)+1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

Pentru $i=2$ afirmația rezultă din (2). Dacă pentru $i \geqslant 2$ relațiile din (3) sînt adevărate, considerăm vîrfurile x_1, x_i, x_{i+1} pentru care avem :

$$\alpha(G-(x_1, x_i))=\alpha(G)+1 ;$$

$$\alpha(G-(x_i, x_{i+1}))=\alpha(G)+1$$

conform (3) și respectiv (2).

Următoarele cazuri sînt posibile :

$$(a) \qquad (x_1, x_{i+1}) \notin U.$$

Atunci vîrfurile considerate mai sus satisfac condițiile din teorema 2 și de aici ar rezulta afirmația din teoremă, ceea ce noi am exclus ;

$$(b) \qquad (x_1, x_{i+1}) \in U \text{ și } \alpha(G-(x_1, x_{i-1}))=\alpha(G).$$

În această situație vîrfurile x_1, x_i, x_{i+1} satisfac în graful $G'=G-(x_1, x_{i+1})$ condițiile teoremei 2 și deci există în G' un orificiu impar care trece prin vîrful x. În graful G corespunde acestui orificiu din G', un ciclu impar de lungime mai mare ca trei, avînd singura coardă (x_1, x_{i+1}) și deci și în acest caz afirmația ar fi adevărată.

Rămîne așa dar că avem :

$$(x_1, x_{i+1}) \in U \text{ și } \alpha(G-(x_1, x_{i+1}))=\alpha(G)+1,$$

adică relațiile din (3).

Considerăm acum vîrfurile x_1, x_2 și x_n și luînd în considerație cazurile (a) și (b) de mai sus, aplicate de această dată asupra perechii (x_2, x_n), deducem că :

$$(x_2, x_n) \in U, \ \alpha(G-(x_2, x_n)) = \alpha(G)+1 \qquad (4)$$

În concluzie, presupunerea că afirmația din teoremă nu este adevărată implică existența relațiilor (2), (3) și (4), Considerăm graful $G_1 = G - x$ și arătăm că este hamiltonian α – critic.

Într-adevăr, ciclul $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ este hamiltonian în G_1 și în plus avem ;

$$\alpha(G_1) = \alpha(G),$$

conform propoziției 2 ;

$$\alpha(G_1-(x_2, x_n)) = \alpha(G_1)+1,$$

din (4) și deoarece $(x, x_2) \in U$;

$$\alpha(G_1-(x_i, x_{i+1})) = \alpha(G_1)+1 \ (i=2, \ldots, n).$$

Această ultimă relație rezultă din (2) și din (3). Într-adevăr pe baza lui (3) rezultă că în graful $G-(x_i, x_{i+1})$ $(i=1, \ldots, n-1)$ există o mulțime stabilă S', cu $\alpha(G)+1$ elemente și care conține vîrfurile x_i și x_{i+1}. Din (2) rezultă că $(x, x_i) \in U$, desi $x \notin S'$ și deci S' este mulțime stabilă în $G_1-(x_i, x_{i+1})$.

Dacă $\alpha(G_1)=1$, rezultă, ținînd cont și de (2), că G este o clică, adică G nu ar fi orificiu α – critic.

Prin urmare, graful G este un orificiu α – critic, lucru care contrazice minimalitatea lui G. Cu aceasta teorema 4 este complet demonstrată.

Este clar faptul că orice graf hamiltonian α – critic este graf conex. În legătură cu mulțimile de articulație ale unui orificiu α – critic are loc :

Teorema 5. Dacă G este orificiu α – critic, atunci mulțimele sale de articulație nu generează clici în graful G.

Demonstrație. Fie A o mulțime de articulație a grafului G astfel încît $Q = G_A$ să fie graf complet. Atunci graful $G-Q$ se descompune în două subgrafuri disjuncte G_1 și G_2, nevide, pentru care, avînd în vedere și propoziția 2, rezultă

$$\alpha(G_1)+\alpha(G_2) = \alpha(G-Q) = \alpha(G) \qquad (5)$$

Vom arăta că Q se descompune în două părți Q_1 și Q_2 (una eventual vidă), astfel încît

$$\alpha(G_i+Q_i) = \alpha(G_i) \qquad i=1, \ 2 \qquad (6)$$

Din (5) și (6) vom deduce că există o descompunere a lui G în G_1+Q_1 și G_2+Q_2 așa încît

$$\alpha(G_1+Q_1)+\alpha(G_2+Q_2) = \alpha(G_1)+\alpha(G_2) = \alpha(G).$$

ceea ce contrazice afirmația din propoziția 1.

Pentru stabilirea relației (6), considerăm un vîrf oarecare x al grafului Q, pentru care avem :

(a) Orice mulțime stabilă maximală a lui G_1 are cel puțin un vîrf adiacent cu x, deci $\alpha(G_1+x) = \alpha(G_1)$;

(b) Dacă (a) nu are loc, atunci subgraful G_2 are această proprietate.

Într-adevăr, dacă există o mulțime de stabilitate maximală S_1 a lui G_1 pentru care x nu este adiacent cu nici un vîrf din S_1, atunci are loc (b), deoarece

dacă ar exista și în G_2 o mulțime stabilă maximală S_2 complet neadiacentă cu x, atunci

$$S' = \{S_1 \cup S_2 \cup \{x\}\}$$

ar fi o mulțime stabilă în G cu

$$|S'| = |S_1| + |S_2| + 1 = \alpha(G_1) + \alpha(G_2) + 1 = \alpha(G) + 1,$$

ceea ce ar fi absurd.

Deci Q se descompune în Q_1 și Q_2, unde
$Q_1 = \{x / x \in Q$ și x satisface $(a)\}$; $Q_2 = \{y / y \in Q$ și y satisface $(b)\}$ pentru care

$$\alpha(G_1 \cup Q_1) = \alpha(G_1) \; ; \; \alpha(G_2 \cup Q_2) = \alpha(G_2)$$

deoarece, în plus Q_1 și Q_2 sînt grafuri complete.

Cu acestea, demonstrația este terminată.

BIBLIOGRAFIE

1. Lovász L. — Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, Discr. Math. 2 (1972, 253–267).
2. Lovász L. — A characterization of perfect graphs, J. Combinatorial Theory (B) 13 (1972)2, 95–98.
3. Olaru E. — Beiträge zur Theorie der perfecten Graphen, Elektron Informationsverarbeitung Kybernetik 8 (1972) 2/3, 147–172.
4. Olaru E. — Zur Charakterisierung perfekter Graphen, Elektron, Informationsverarbeitung Kybernetik 9 (1973), 543–548.
5. Olaru E. — Zur Theorie der perfekten Graphen, J. Combinatorial Theory (B) 23 (1977), 1,95–105.

α – KRITISCHEN HAMILTONSCHEN GRAPHEN

Die vorgliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Eigenschaften der α – kritischen Löcher welche die Struktur der α – kritischen hamiltonschen Graphen kennzeichnen.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) **Fascicola 1 —1979**

DESPRE UNELE PROPRIETĂŢI ALE GRUPULUI SO (*n*)

DE
D. RENDI şi B. RENDI

Fie V un spaţiu vectorial real n-dimensional şi $\Omega^P(V)$ mulţimea p-formelor definite pe V. Pentru $\omega \in \Omega^P(V)$ cu

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dl_{i_1} \vee \ldots dl_{i_p}$$

în baza $(e_1, \ldots, e_n)$ s-a definit [4] adjuncta $\bar{\omega} \in \Omega^{n-p}(V)$ cu

$$\bar{\omega} = \sum_{1 \leq i_{p+1} < \ldots < i_n \leq n} (-1)^{i_1 + i_2 + \ldots i_p - \frac{p(p+1)}{2}} a_{i_1 \ldots i_p} dl_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge dl_{i_n}$$

unde

$$\{i_1, \ldots, i_p\} U \{i_{p+1}, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Astfel se obţine aplicaţia

$$L_p : \Omega^p(V) \to \Omega^{n-p}(V), \quad L_p(\omega) = \bar{\omega}.$$

Fie $T : V \to V$ un automorfism. Punem problema determinării transformărilor T pentru care aplicaţiile induse

$$T_p : \Omega^p(V) \to \Omega^p(V)$$

$$T_{n-p} : \Omega^{n-p}(V) \to \Omega^{n-p}(V)$$

satisfac relaţia

$$L_p \circ T_p = T_{n-p} \circ L_p \tag{1}$$

Fie π matricea ataşată transformării T în baza $(e, \ldots, e_n)$

$$\pi = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Transformările T cu proprietatea (1) trebuie să satisfacă condiţiile

$$\sum_{\substack{\Delta \leq j_1 < \ldots < j_{n-p} \leq n \\ \Delta \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n}} (-1)^{i_1 + \ldots + i_p - \frac{p(p+1)}{2}} a_{i_1 \ldots i_p} \begin{vmatrix} a_{j_1 k_1} \ldots a_{j_1 k_{n-p}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j_{n-p} k_1} \ldots a_{j_{n-p} k_{n-p}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j_1 < \ldots j < {}_{n-p} \le n \\ 1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n}} (-1)^{h_1 + \ldots h_p - \frac{p(p+1)}{2}} a_{i_1 \ldots i_p} \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 h_1} \ldots \alpha_{i_p h_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_p h_1} \ldots \alpha_{i_p h_p} \end{vmatrix}$$

pentru orice $a_{i \ldots i} \in \mathbf{R}$, unde $\{i, \ldots, i_p\} U \{j \ldots j_{n-p}\} = \{h, \ldots, h_p\} U \{k, \ldots, k_{n-p}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

De aici rezultă condițiile

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1 h_1} \ldots \alpha_{i_p h_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_p h_1} \ldots \alpha_{i_p h_p} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1 + \ldots + i_p + h_1 + \ldots + h_p} \begin{vmatrix} \alpha_{j_1 k_1} \ldots \alpha_{j_1 k_{n-p}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{j_{n-p} k_1} \ldots \alpha_{j_{n-p}} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Vom nota cu $\pi\ (n, p)$ mulțimea matricelor $\pi \in GL\ (n, R)$ pentru care orice minor de ordinul p este egal cu complementul său algebric. Se observă că transformarea T verifică (1) sacă și numai dacă matricea π atașată transformării este din $\pi\ (n, p)$. Deoarece mulțimea transformăriilor T cu proprietatea (1) formează un grup, rezultă că $\pi\ (n, p)$ formează un subgrup al grupului multiplicativ $GL\ (n, R)$.

Se vede imediat că $\pi\ (n, p) = \pi\ (n, n-p)$.

Ne propunem să studiem grupul $\pi\ (n, p)$. Pentru aceasta fie cazul $p=0$, deci grupul $\pi\ (n, 0)$. Dacă $\omega \in \Omega^\circ\ (V)$ atunci $\omega = a \in \mathbf{R}$ iar $\bar{\omega} = a\ de \wedge \ldots \wedge de_n$. Dacă $\pi \in \pi\ (n, 0)$ atunci transformarea corespunzătoare T are proprietatea (1), adică

$$T\ (\bar{\omega}) = a\ (det\ \pi)\ \ df \wedge \ldots \wedge df_n \Rightarrow \overline{T\ (\omega)} = \bar{\omega} = a.df \wedge \ldots \wedge df_n$$

De aici se obține det $\pi = 1$. Astfel $\pi\ (n.0)$ este mulțimea matricilor de determinant 1.

Fie grupul $\pi\ (n, 1)$ și $\pi \in \pi\ (n, 1)$ cu

$$\pi = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sînt satisfăcute condițiile $a_{ij} = A_{ij}$ unde A_{ij} unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij}. Se aici rezultă $\pi^* = \pi'$. Deoarece $\frac{1}{(det \pi)} \pi^* = \pi^{-1}$ avem $det \left(\frac{1}{det \pi} \pi^* \right) = det\ \pi^{-1}$ deci $det\ \pi^* \left(\frac{1}{det \pi} \right) n = \frac{1}{det \pi}$, $det\ \pi^* = (det\ \pi)^{-1}$ ceea ce implică $(det\ \pi)^{n-1} = \det \pi$. Prin urmare $drt\ \pi = 1$ pentru $n = 2k+1$ și $det\ \pi = +1$ pentru $n = 2k > 2$.

Folosind dezvoltarea unui determinant după o linie și condițiile $a_{ij} = A_{ij}$ rezultă $det\ \pi = \Sigma a_2^{ij} > 0$ deci $det\ \pi = 1$ pentru orice $n \in N$, $n > 2$.

Astfel s-a dovedit că $\pi\ (n, 1) = \pi\ (n, n-1) = So\ (n)$ este grupul special ortogonal.

$$\pi\ (2, 1) = \{\alpha\pi / \pi \in So\ (2),\ \alpha \in \mathbf{R}\}$$

Fie acum grupul $\pi\ (n, p)$ și $\pi \in \pi\ (n, p)$, $\pi = (\alpha_{ij})$. Se notează cu $\tilde{\pi}$ matricea $(\tilde{\alpha}_{ij})$ unde

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1j-1} & \alpha_{1j+1} \ldots \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i-11} \ldots \alpha_{i-1j-1} & \alpha_{i-1j+1} \ldots \alpha_{i-1n} \\ \alpha_{i+11} \ldots \alpha_{i+1j-1} & \alpha_{i+1j+1} \ldots \alpha_{i+1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nj-1} & \alpha_{nj+1} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

Astfel $((1-)^{i+j}\alpha_{ij})=(\pi^*)'$. Au loc identităţile lui Iacobi

$$\begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{i_1j_1}\ldots\tilde{\alpha}_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\alpha}_{i_pj_1}\ldots\tilde{\alpha}_{i_pj_p} \end{vmatrix} = (det\ \pi)^{p-1} \begin{vmatrix} \alpha_{i_{p+1}j_{p+1}}\ldots\alpha_{i_{p+1}j_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_nj_{p+1}}\ldots\alpha_{i_nj_n} \end{vmatrix} \tag{3}$$

unde $\{i_1, \ldots, i_p\}U\{i_{p+1}, \ldots, i_n\}=\{j_1, \ldots, j_p\}U\{j_{p+1}, \ldots, j_n\}=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă $\pi\in\pi$ (n, p) au loc relaţiile

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1j_1}\ldots\alpha_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_pj_1}\ldots\alpha_{i_pj_p} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p} \begin{vmatrix} \alpha_{i_{p+1}j_{p+1}}\ldots\alpha_{i_{p+1}j_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_nj_{p+1}}\ldots\alpha_{i_nj_n} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Folosind identităţile (3) şi (4) se obţine

$$\begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{i_{p+1}j_{p+1}}\ldots\tilde{\alpha}_{i_{p+1}j_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\alpha}_{i_nj_{p+1}}\ldots\tilde{\alpha}_{i_nj_n} \end{vmatrix} \frac{1}{(det\ \pi)^{n-p-1}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1j_1}\ldots\alpha_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_pj_1}\ldots\alpha_{i_pj_p} \end{vmatrix} \frac{1}{(det\ \pi)^{p-1}}$$

De aici se observă că dacă $(\det \pi)^{n-p-1}=(det\ \pi)^{p-1}$ atunci $\tilde{\pi}\in\pi$ (n, p) şi prin urmare şi $\pi^*\in\pi$ (n, p). Această ultimă afirmaţie rezultă dacă arătăm că $(\pi^*)'\in\pi$ (n, p). Fie

$$(\pi^*)'=\begin{pmatrix} A_{11}\ldots A_{1n} \\ \\ A_{n1}\ldots A_{nn} \end{pmatrix} \text{ cu } A_{ij}=(-1)^{i+j}\tilde{\alpha}_{ij}$$

Astfel

$$\begin{vmatrix} A_{i_1j_1}\ldots A_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{i_pj_1}\ldots A_{i_pj_p} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+\ldots+i_p+i_1+\ldots+j_p} \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{i_1j_1}\ldots\tilde{\alpha}_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\alpha}_{i_pj_1}\ldots\tilde{\alpha}_{i_pj_p} \end{vmatrix}$$

şi

$$\begin{vmatrix} A_{i_{p+1}j_{p+1}}\ldots A_{i_{p+1}j_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{i_pj_{p+1}}\ldots A_{i_nj_n} \end{vmatrix} = (-1)^{i_{p+1}+\ldots+i_n+j_{p+1}+\ldots+j_n} \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{i_{p+1}j_{p+1}}\ldots\tilde{\alpha}_{i_{p+1}j_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\alpha}_{i_nj_{p+1}}\ldots\tilde{\alpha}_{i_nj_n} \end{vmatrix}$$

Cum $(-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p}=(-1)^{i_{p+1}+\ldots+i_n+jp+1+\ldots+i_n}$, rezultă deci că $(\pi^*)'\in\pi$ (n, p) dacă $\tilde{\pi}\in\pi$ (n, p).

Deci condiția ca din $\pi \in \Pi(n, p)$ să rezulte că și $\pi^* \in \Pi(n, p)$, este ca $(det\,\pi)^{n-2p} = 1$, adică $det\,\pi = 1$ pentru $n = 2k+1$, $det\,\pi = +1$ pentru $n = 2k$ și $det\,\pi$ oarecare pentru $n = 2p$. Deoarece $\pi \in \Pi(n, p)$ din dezvoltarea lui $det\,\pi$ după primele p linii de exemplu, vom avea

$$det\,\pi = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_p \le n} \begin{vmatrix} \alpha_{1j_1} \ldots \alpha_{1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{pj_1} \ldots \alpha_{pj_p} \end{vmatrix}^2$$

deci $det\,\pi > 0$.

Astfel rezultă că dacă $\pi \in \Pi(n, p)$ atunci $^* \in \Pi(n, p)$ dacă și numai dacă $det\,\ = 1$ sau $n = 2p$.

Pornind de la relațiile (4) și folosind identitățiile lui Iacobi, obținem

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1j_1} \ldots \alpha_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_pj_1} \ldots \alpha_{i_pj_p} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p} \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{i_1j_1} \ldots \tilde{\alpha}_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\alpha}_{i_pj_p} \ldots \tilde{\alpha}_{i_pj_p} \end{vmatrix} \frac{1}{(det\,\pi)^{p-1}} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-1)^{i_1+j_1}\tilde{\alpha}_{i_1j_1} \ldots (-1)^{i_1+j_p}\tilde{\alpha}_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{j_p+j_1}\tilde{\alpha}_{i_pj_1} \ldots (-1)^{i_p+j_p}\tilde{\alpha}_{i_pj_p} \end{vmatrix} \frac{1}{(det\,\pi)^{p-1}} = \begin{vmatrix} A_{i_1j_1} \ldots A_{i_1j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{i_pj_1} \ldots A_{i_pj_p} \end{vmatrix} \frac{1}{(det\,\pi)^{p-1}}$$

Considerînd matricile π și $\frac{1}{(det\,\pi)^{\frac{p-1}{p}}} (\pi^*)'$ se observă că oriceminor de ordinul p din este egal cu minorul corespunzător din $(det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1} (\pi^*)'$. Conform [4] rezultă

$$\alpha_{ij} = (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1} A_{ij} \text{ dacă } p = 2k+1$$

$$\alpha_{ij} = \pm (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1} A_{ij} \text{ dacă } p = 2k$$

Cum $\Pi(n, p) = \Pi(n, n-p)$, putem înlocui p cu $n-p$. Astfel

$$\alpha_{ij} = (det\,\pi)^{\frac{1}{n-p}-1} A_{ij},\ n-p = 2k+1$$

Avem deci

$$\pi = \pm \frac{1}{(det\,\pi)^{\frac{p-1}{p}}} (\pi^*)' = \pm \frac{1}{(det\,\pi)^{\frac{n-p-1}{n-p}}} (\pi^*)'$$

Se observă că avem semnul $-$ dacă și numai dacă p este par și $n-p$ este par, adică n este par.

Dacă $n = 2k$ și $p = 2k+1$, atunci

$$\alpha_{ij} = (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1} A_{ij} = (det\,\pi)^{\frac{1}{n-p}-1} A_{ij}$$

rezultă deci

$$(det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1} = (det\,\pi)^{\frac{1}{n-p}-1} A_{ij}$$

ceea ce este posibil dacă $det\,\pi = 1$ sau $n = 2p$

Prin urmare dacă $n \neq 2p$, atunci $det\,\pi = 1$ și $\alpha_{ij} = A_{ij}$, adică $\pi' = \pi^*$, deci $\pi\ n,\ p)\ \ So(n)$

Pentru $n = 2p$ și $p = 2k$, analog avem

$$\alpha_{ij} = \pm (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1} A_{ij} = \pm\,(det\,\pi)^{\frac{1}{n-p}-1} A_{ij}$$

de unde rezultă că $det\,\pi = 1$ și deci $\pi\,(n,\ p) \subset So\,(n)$

Astfel avem cazurile

$$\left.\begin{array}{l} n = 2p = 4k,\ \pi' = \pm (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1}\,\pi^* \\ n = 2p \neq 4k,\ \pi' = (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1}\,\pi^* \end{array}\right\} \text{ și } det\,\pi = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 2h,\ p = 2k,\ n \neq 2p,\ \pi' = \pm\pi^* \\ n \neq 2h, \text{ sau } p \neq 2k\ \pi' = \pi^* \end{array}\right\} \text{ și } det\,\pi = 1$$

Egalitarea $\pi' = \pm (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1}\,\pi^*$ nu dă altă informație relativ la valoarea lui det, deoarece trecînd la calculul determinanților obținem

$$det\,\pi' = \left(\pm (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1}\right)^n det\,\pi^*$$

adică $det\,\pi = (det\,\pi)^{\frac{n}{p}-n}\,(det\,\pi)^{n-1}$

de unde rezultă $n = 2p$ (condiție deja cunoscută).

Se observă că pentru orice n și p $S(o\,n) \subset \pi\,(n,\ p)$. Pentru aceasta fie $\pi \in So\,(n)$. Atunci $\pi' = \pi^*$, adică $\pi = (\pi^*)^T$. Rezultă că dacă notăm $\pi = (\alpha_{ij})$ și $\pi^* = (A_{ij})$ atunci

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_1 j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_p j_1} \ldots \alpha_{i_p j_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{i_1 j_1} \ldots A_{i_1 j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{i_p j_1} \ldots A_{i_p j_p} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1 + \ldots + i_p + j_1 + \ldots + j_p} \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{i_1 j_1} \ldots \tilde{\alpha}_{i_1 j_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\alpha}_{i_p j_1} \ldots \tilde{\alpha}_{i_p j_p} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i_1 + \ldots + i_p + j_1 + \ldots + j_p} \begin{vmatrix} \alpha_{i_{p+1} j_{p+1}} \ldots \alpha_{i_{p+1} j_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i_n j_{p+1}} \ldots \alpha_{i_n j_n} \end{vmatrix} (det\,\pi)^{p-1}$$

Cum $\pi \in So\,(n)$ rezultă $\det \pi = 1$, deci $\pi \in \pi\,(n,\ p)$.

Revenind la cazul $n = 2k$, $p = 2h$ avem $\pi' = -\pi^*$ și $\det \pi = 1$ Dacă $\det \pi = 1$ rezultă că $\pi^{-1} = \pi^*$ adică avem $\pi' = -\pi^{-1}$. Înmulțind cu π obținem $\pi'\pi = \bigcup$, unde $\bigcup$ este matricea unitate. De aici obținem $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = -1$ și avem $\sum_{i=1}^{in} a_{ij} a_{ik} = 0$ ceea ce este imposibil. Deci $\pi' = -\pi^*$ nu poate avea loc.

Analog în cazul $n = 2p$, $\pi' = -(det\,\pi)^{\frac{p-1}{p}}\,\pi^*$ nu poate avea loc. Prin urmare avem

$$\pi' = (det\,\pi)^{\frac{1}{p}-1}\ \pi^* \text{ pentru } n = 2p$$

$$\pi' = \pi^* \qquad \text{pentru } n \neq 2p$$

Deci $\pi\,(n,\ p) = So\,(n)$ pentru $n \neq 2p$

În cazul $n=2p$ avem

$$\pi'=(det\,\pi)^{\frac{1}{p}}\,\pi^{-1}$$

adică $\pi'\cdot\pi=(\det\pi)^{\frac{1}{p}}$, $\bigcup$. Rezultă deai ci că π formează coordonatele a n vectori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ care sînt ortogonali doi cîte doi și au același modul $|v_j|^2=$ $=\sum a_{ij}^2=(det\,\pi)^{\frac{1}{p}}$ adică

$$|v_i|=(det\pi)^{\frac{1}{p}}$$

Astfel dacă $\pi\in\pi(n, p)$ atunci

$$\pi=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ cu } \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ih}=0 \text{ pentru } j\neq h \text{ și } \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2=a^2.$$

Deci $\frac{1}{a}\,\pi\in So(n)$ și $\pi(2p, p)=\{a\pi/a\in\mathbf{R}, \pi\in So(2p)\}$

BIBLIOGRAFIE

1. De Rham, G. Variétés differentiables, Herman, Paris, 1960.
2. Godbillon, C., Geometrie differentieble et Mecanique analitique, Hermann, Paris, 1969.
3. Gherghina D, și Rendi B. Sur le rang d'une p-forme extérieure Preprint, Tipografia Univ. Timișoara, 1971.
4. Gherghina D. și Rendi B. Despre adjuncta unei transformări T G L (n, R).

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU GROUPE *SO* (*n*)

RESUMÉ

Dans cet ouvrage on étudie les propriétés du groupe spécial orthogonal *So* (*n*), des propriètés que sont liées d'adjointes des formes différentiélles extérieures. On montre que tout déterminant mineur d'ordre p d'une matrice $\pi\in$ So (n) est égal avec le détérminant mineur complémentaire, et reciproque.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 1—1979**

ASUPRA LIMITELOR DIRECTE DE ALGEBRE

DE

D. RENDI şi B. RENDI

Prin domeniu de operaţii se va înţelege perechea (Ω, ψ) unde Ω este o mulţime arbitrară, iar ψ este o aplicaţie $\psi : \Omega \to Ord$ unde prin Ord s-a notat clasa numerelor ordinale. Elementele $\omega \in \Omega$ se numesc operaţii iar ordinalul $\psi(\omega) = \rho$ se numeşte aritatea operaţiei ω. O algebră cu domeniul de operaţii (Ω, ψ) este perechea (A, φ) unde A este o mulţime arbitrară numită mulţime de bază, iar φ este o aplicaţie

$$\varphi : \Omega \to \{\mathfrak{P}(A^{\rho+1})/\rho \in \psi(\Omega)\}$$

astfel încît să aibe loc $\varphi(\omega) \subset A^{\Psi(\omega)+1}$ şi $\varphi(\omega)$ să fie o funcţie

$$\varphi(\omega) : A^{\Psi(\omega)} \to A$$

unde prin $\mathfrak{P}(X)$ se înţelege mulţimea părţilor lui X, iar prin A^ρ se înţelege produsul cartezian $A^\rho = \pi_{\xi<\rho} A_\xi$ cu $A^\xi = A$ pentru orice ξ.

Dacă funcţiile $\varphi(\omega)$ sînt definite pe o submulţime $D_\omega \subset A^{\Psi(\omega)}$ atunci se spune că (A, φ) este o algebră parţială cu domeniul de operaţii (Ω, φ).

Elementele din A^ρ se notează prin $\underline{a}$ sau $(a_\xi)_{\xi<\rho}$ sau $(a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots)_{\xi<\rho}$, iar dacă $\varphi(\omega)(\underline{a}) = a$ atunci se folosesc notaţiile $\omega(\underline{a}) = a$ sau $\omega((a_\xi)_{\xi<\rho}) = a$ sau $\omega((a_0, \ldots, a_\xi, \ldots)_{\xi<\rho}) = a$

În continuare se stabilesc condiţii suficiente pentru existenţa limitei directe a unui sistem direct de algebre.

Definiţia 1. Un sistem direct de algebre este dat de următoarele:

a) o mulţime dirijată $(I, \geqslant)$.

b) o familie de algebre $\{(A_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ cu domeniul de operaţii (Ω, ψ).

c) o familie de omomorfisme $\{f_j^i : A_i \to A_j / i, j \in I, i \leqslant j\}$ pentuu care $f_i^i = 1_{A_i}$ pentru orice $i \in I$ şi $f_j^i \cdot f_k^j = f_k^i$ pentru orice $i \leqslant j \leqslant k$.

Fie că s-a dat sistemul direct de algebre

$$\{(I, \leqslant); \{(A_i, \varphi_i)_{i \in I}\}, \{f_j^i \mid i, j \in I, i \leqslant j\}\} \tag{1}$$

Se notează cu A' reuniunea disjunctă a familiei de mulţimi $\{A_i\}_{i \in I}$ adică $A' = \{(x, i) \mid x \in A_i, i \in I\}$. Se defineşte relaţia de echivalenţă $\theta \subset A' \times A'$ prin $[(x, i), (y, j)] \in \theta$ dacă şi numai dacă există $k \in I$, $k \geqslant i$, $k \geqslant j$ astfel încît $f_k^i(x) = f_k^i(y)$. Fie $A = A'/\theta$. Se observă că A este limita directă a sistemului direct de mulţimi $\{A_i, f_j^i\}$. Elementele lui A se notează prin $[x] \in A$. Dacă domeniul de operaţii conţine numai operaţii finitare, adică $\psi(\Omega) \subset N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ atunci pe mulţimea A există o structură canonică de algebre

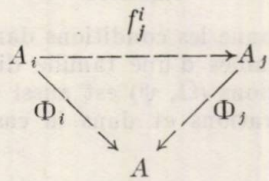
cu domeniul de operații (Ω, ψ), și anume: pentru orice operație $\omega \in \Omega$ cu $\psi(\omega)=n$ și orice $[a_1], \ldots, [a_n] \in A$ se ia

$$\omega([a_1], [a_2], \ldots, [a_n])=\omega(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$$

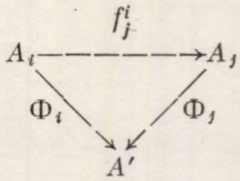
unde $a'_1, \ldots, a'_n \in A_k$, k fiind un majorant pentru mulțimea de indici $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I$ astfel aleasă încît $a_j \in A_{i_j}$ pentru $j=1, \ldots, n$. Operația astfel definită nu depinde de alegerea lui k. Pentru o operație 0-ară ω_0 se consideră elementul $[\omega_0^i]$ unde $\omega_0^i \in A_i$ este elementul determinat de ω_0 în algebra (A_i, φ_i).

Aplicațiile $\Phi_i : A_i \to A$ definite prin $\Phi_i(x)=[x]$ sînt omomofrisme de algebre. În cazul operațiilor infinitare în general nu se cunosc metode pentru înzestrarea mulțimii A cu o structură de albegră cu domeniul de operații (Ω, ψ). Pentru definirea limitei directe a unui sistem direct se folosește definiția limitei directe într-o categorie. Astfel definiția limitei directe în categoria algebrelor cu domeniul de operații (Ω, ψ) este:

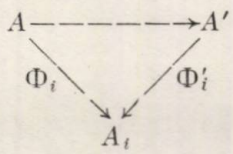
Definiția 2. Algebra (A, φ) cu domeniul de operații (Ω, ψ) și familia de omomorfisme $\{\Phi_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ se numește limita directă a familiei directe (1) dacă pentru orice $i, j \in I$ cu $i \leqslant j$ diagramele



sînt comutative, și ori de cîte ori pentru algebra (A', φ') cu domeniul de operații (Ω, ψ) și familia de omomorfisme $\{\Phi'_i : A_i \to A'\}_{i \in I}$ diagramele



sînt comutative pentru orice $i, j \in I$ cu $i \leqslant j$, rezultă că există un omomorfism $\Phi : A \to A'$ astfel încît diagrama



să fie comutativă pentru orice $i \in I$.

Se verifică cu ușurință că abstracție făcînd de un izomorfism această definiție coincide cu cea dată în cazul cînd $\psi(\Omega) \subset N$.

Teoremă. Condiția suficientă pentru ca limita directă a sistemului (1) să existe este ca pentru orice $\rho \in \psi(\Omega)$ și $[a_\xi^i] \in A$, $\xi < \rho$ să existe $k \in I$ și $b_\xi \in A_k$, $\xi < \rho$ astfel încît pentru orice i_ξ să aibă loc $i_\xi \leqslant k$ sau $i_\xi \geqslant k$ și $f_k^{i_\xi}(a_{i_\xi}) = b_\xi$ sau $f_{i_\xi}^k(b_\xi)=a_{i_\xi}$ unde $a_{i_\xi} \in A_{i_\xi}$.

Demonstrație. Fie $\omega \in \Omega$ cu $\psi(\omega)=\rho$ și fie $[a_\xi] \in A$, $\xi < \rho$. Atunci există $i_\xi \in I$ astfel încît $a_\xi \in A_{i_\xi}$, $\xi < \rho$. Prin ipoteză există $k \in I$ și $b_\xi \in A_k$, $\xi < \rho$

astfel încît $i_\xi \leqslant k$ sau $i_\xi \geqslant k$ și $f_k^{i_\xi}(a_\xi)=b_\xi$ sau $f_{i_\xi}(b_\xi)=a_\xi$. Deoarece (A_k, φ_k) este algebră cu domeniul de operații (Ω, ψ), este definit elementul $b=\omega((b_\xi)_{\xi<\rho})$. Prin definiție se va lua $\omega((a_\xi])_{\xi<\rho})=[b]$. Astfel pe mulțimea A s-a dat o structură canonică de algebră cu domeniul de operații (Ω, ψ) și se verifică imediat că algebra (A, φ) astfel obținută împreumă cu omomorfismele $\Phi_i=A_i \to A$ definite prin $\Phi_i(x)=[x]$ este limita directă a familiei (1) conform definiției 2. Astfel în condițiile teoremei date limita directă a sistemului direct (1) există și se poate construi efectiv.

Observație. Dacă în mulțimea dirijată $(I, \leqslant)$ există un element $i_0 \in I$ comparabil cu toate elementele din I, adică pentru orice $j \in I$ are loc $i_0 \leqslant j$ sau $j \leqslant i_0$, atunci condițiile teoremei vor fi verificate dacă aplicațiile $f_j^{i_0}$ sînt surjecții, și în acest caz particular limita directă va fi izomorfă cu o algebră cît a algebrei (A_{i0}, φ_{i0}).

SUR LES LIMITES DIRECTES D'ALGEBRES

RESUMÉ

Dans cet ouvrage on donne les conditions dans les quelles la limite directe dans la catégorie des ensembles d'une famille directe d'algèbres universailles avec le domaine des opérations (Ω, ψ) est aussi une algèbre universaille avec le méme domaine des opérations et dans le cas des opérations infinitaires.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) **Fascicola 1—1979**

TRANSLAŢII PE Ω — ALGEBRE

UROŞU CARMENCITA

Fie A o algebră arbitrară. Fiecare operator n-ar $\omega \in \Omega$ defineşte o operaţie n-ară pe A: $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \ldots x_n\omega$.

Fixînd în A valorile a r argumente, obţinem operaţii (n-r) are pentru $r \leqslant n$. În particular dacă se fixează toţi x_i, exceptînd unul, obţinem pentru orice $n-1$ elemente $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ şi $\forall i = 1, \ldots, n$ operaţia unară:

$$\varkappa \to a_1 \ldots a_{i-1}\varkappa a_i \ldots a_{n-1}\omega \in A \qquad (1)$$

În acest caz vom spune că (1) este o translaţie elementară în A. În general aplicaţia $\theta : A \to A$ se numeşte translaţie dacă $\theta = 1A$ sau θ poate fi reprezentată sub formă de produs a unui număr finit de translaţii elementare. Un caz particular de translaţii sînt operaţiile pe A definite de operatori unari.

Propoziţia I. Echivalenţa q pe Ω — algebra A este congruenţă *d.* şi *n.d.* ea este închisă relativ la toate translaţiile.

Demonstraţie. Dacă relaţia q este o congruenţă, atunci pentru orice ω şi orice $a_1, \ldots, a_n, b \in A$, dacă $a_i \equiv b \pmod q$ atunci avem:

$$a_1 \ldots a_n\omega \equiv a_1 \ldots a_{i-1}ba_{i+1} \ldots a_n\omega \pmod q$$

şi de aceea q este închisă relativ la toate translaţiile elementare. Conform inducţiei simple rezultă că q este închisă şi relativ la toate translaţiile.

Reciproc, presupunem că q, este închisă relativ la toate translaţiile elementare şi fie a_i, $a_i \in A$ astfel ca $a_i \equiv a_i \pmod q$, $i = 1, \ldots, n$ atunci avem:

$$a_1 \ldots a_n\omega \equiv a_ia_2 \ldots a_n\omega \quad a_1'a_2'a_3 \ldots a_n\omega \quad a_1' \ldots a_n'\omega$$

Astfel q este închisă relativ la toate operaţiile şi deci este o congruenţă.

Propoziţia 2. Relaţiile de congruenţă pe o Ω — algebră sînt comutabile dacă pentru fiecare pereche a, $b \in A$ există o translaţie τ a algebrei A care schimbă pe a şi b între ele.

Demonstraţie. Fie A o Ω — algebră care satisface condiţiile din enunţ şi fie q, $r \in \mathcal{C}_{\Omega(A)}$. Dacă $(a, b) \in q0r$ înseamnă că pentru un oarecare $c \in A$ avem:

$$a \equiv c\ (q) \text{ şi } c \equiv b\ (r)$$

Din ipoteză există translaţia τ a algebrei A care comută elementele a şi b între ele şi aşa cum q şi r sînt închise relativ la τ avem:

$$b \equiv c^\tau\ (q) \text{ şi } c^\tau \equiv a\ (r)$$

Prin urmare, $(b, a) \in qor$ adică $(a, b) \in roq$. Aceasta înseamnă că $qor \leqslant roq$ iar conform simetriei avem $qor \geqslant roq$ de unde rezultă că $qor = roq$.

Propoziția 3. Fie A o Ω - algebră și S o submulțime arbitrară a algebrei A. Vom scrie $a \sim b \pmod S$ dacă $a=b$ sau $a,\ b \in S^\tau$ unde τ este o translație pe algebra A. Vom scrie $a \approx b \pmod S$ dacă există un șir finit $a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b$ astfel ca $x_{i-1} \sim x_i \pmod S$. Atunci relația $a \approx b$ este o congruență pe A și acesta este cea mai mică congruență care admite o clasă ce-l conține pe S.

Dacă definim: $q^*=\{(x, y) \in A^2 / x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S\}$, aceasta va fi cea mai mare congruență pe A pentru care S este reuniune de q^* clase. S va fi clasa congruenței unice pe $Ad.$ și $n.d.$ pentru orice $x, y \in A$ avem că echivalența $x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S$ oricare ar fi translația τ implică $x \approx y \pmod S$.

Demonstrație. Vom arăta că relația definită astfel:

$$a \approx b \pmod S \Leftrightarrow \exists\, x_0=a,\ x_1, \ldots, x_n=b,\ x_{i-1} \sim x_i \pmod S$$

este o congruență pe A.

1) Avem $a \approx a$ deoarece $a=a$ și deci avem un șir constant finit, ceea ce înseamnă că are loc proprietatea de reflexivitate.

2) Are loc simetria relației: $a \approx b \Rightarrow b \approx a$ și $\exists\ a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b$ cu $x_{i-1} \sim x_i \pmod S$ de unde rezultă că există șirul: $b=x_n^0, x_{n-1}^1, \ldots, x_0^n=a$ unde notăm cu x_n^0 pe x_n.

3) Dacă există șirurile $x_0=a, x_1, \ldots, x_n=b$ și $b=x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}=c$ atunci există șirul: $a=x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}=c$ de unde rezultă proprietatea de tranzitivitate.

Clasele de echivalență sînt imaginile S^τ disjuncte sau reuniuni de imagini care se intersectează. Translațiile fiind în număr finit (dacă Ω este un sistem finit de operatori) elementele care nu aparțin nici unui S^τ formează fiecare cîte o clasă de echivalență.

Vom verifica că relația introdusă este compatibilă cu orice operație $\omega \in \Omega$. Să considerăm elementele $a_i \approx b_i$ și șirurile:

$$a_1=a_1,\ a_1, \ldots, a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_i=x_0,\ x_1, \ldots, x_n=b_i;\ x_{i-1} \sim x_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=a_n,\ a_n, \ldots, a_n$$

Aplicăm operația ω pe coloane și avem: $a_1 \ldots x_0 \ldots a_n \sim a_2 \ldots x_1 \ldots a_n \in S^{\tau\tau_1}$ unde $\tau\tau_1$ este compunerea celor două translații efectuate.

Obținem deci un șir de elemente care sînt în relația notată $\sim$ și deci are finit loc: $a_1 a_2 \ldots a_1 \ldots a_n \omega \approx a_1 a_2 \ldots b_i \ldots a_n \omega$. Considerăm acuma șirurile:

$$a_1=x_0^1,\ x_1^1, \ldots, x_{pi}^1=b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_i=x_0^i,\ x_1^i, \ldots, x_{pi}^i=b_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=x_(^n,\ x_1^n, \ldots, x_{pn}^n=b_n$$

Fixăm $n-1$ elemente pe coloană și le compunem cu cele din prima linie. Vor rezulta elemente echivalente deoarece corespund aceleași translații. Orice

șir se poate prelungii cu un șir constant cu termenii egali cu ultimul termen. Va rezulta un șir finit care satisface condiția cerută și deci:

$$a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n \omega \approx b_1 \ldots b_i \ldots b_n \omega.$$

Dacă notăm $q = \{(x, y) \mid x \approx y \pmod S\}$ atunci $S_2 \subset q$ fie $r = \{(x, y) \in A^2\}$ o relație de congruență astfel ca $S^2 \subset r$. Vom arăta că q este cea mai mică congruență cu această proprietate și are loc: $q \subset r$.

Fie $a \approx b \pmod S$ și deci există șirul $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$, $x_{i-1}\ x_i$. Trebuie să arătăm că are loc $(a, b) \in r$. Dacă r este congruență ea este închisă relativ la toate translațiile. Deci dacă $a \approx b \pmod r$, $a, b \in S$ atunci $a^\tau \approx b^\tau \pmod r$ și acestea sînt elemente din clasa care conține pe S^τ. Deci față de fiecare translație există clase care conțin pe S^{τ_1}, S^{τ_2}, ..., adică clase de congruență mod. S. Înseamnă că:

$$x_0 \equiv x_1 \pmod r,\ x_0,\ x_1 \in S^\tau$$

$$x_1 \equiv x_2 \pmod r,\ x_1,\ x_2 \in S^{\tau_1}$$

și deci rezultă $a \equiv b \pmod r$ adică $q \subset r$.

Definim acum următoarea relație binară:

$q = \{(x, y) \in A^2 / x \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S\}$ pentru orice translație τ.

Să arătăm că q este cea mai mare congruență pe A pentru care S este reuniune de q — clase. Să arătăm că q este o relație de congruență. Reflexivitatea:

$$x \sim x \pmod q\ ;\ x^\tau \in S \Leftrightarrow x^\tau \in S$$

Simetria: $x \sim y \pmod q \Rightarrow y \sim x \pmod q$
dacă $x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S \Rightarrow y^\tau \in S \Leftrightarrow x^\tau \in S$.

Tranzitivitate: $x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S$ și $y^\tau \in S \Leftrightarrow Z^\tau \in S$ implică $x^\tau \in S \Leftrightarrow Z^\tau \in S$.
Se observă că S este reuniune de q — clase.

Elementele din S au proprietatea că prin τ_{1_A} imaginile lor sînt tot în S. Elementele din A care pentru nici o translație nu au imagini în S formează fiecare o clasă.

Pentru a arăta că q este o congruență vom arăta că ea este închisă relativ la toate translațiile. Dacă $x \equiv b \pmod q$ înseamnă că pentru orice translație τ pentru care $x \in S$ avem în același timp și $y^\tau \in S$ și reciproc.

Dacă se face o translație arbitrară τ' avem $x^{\tau'} \equiv y^{\tau'} (q)$, $x^{\tau'}, y^{\tau'} \in A$ și sînt deci în aceeași clasă.

$(x^{\tau'})^\tau \in S \Leftrightarrow (y^{\tau'})^\tau \in S$ deoarece $x^{\tau'\tau} \in S \Leftrightarrow y^{\tau'\tau} \in S$
și cum $\tau'\tau$ este o translație oarecare avem: $x^{\tau'} \equiv y^{\tau'} \pmod q$.

Fie acum relația: $r = \{(x, y) \in A^2 / S = \bigcup A_i,\ A_i \in A/r\}$. Atît r cît și q sînt echivalențe pe S și S este reuniune de r — clase respectiv de q — clase. Vom arăta că $r \subset q$.

Relația r este închisă relativ la toate translațiile, dacă $x \equiv y \pmod r$ rezultă $x^\tau \equiv y \pmod r$ adică x^τ și y^τ fac parte din aceeași clasă Deci $x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S$ adică $x \equiv y \pmod q$. Orice elemente congruente mod r sînt congruente mod q și deci q este congruența maximală.

Vom arăta acum ultima afirmație a propoziției: S este clasa congruenței unice pe *Ad.* și *n.d.* pentru orice $x, y \in A$ avem: $x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S$ pentru toate translațiile τ implică $x \approx y \pmod S$.

Avem că $x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S$ pentru toate translațiile τ implică $x \approx y$. Deci $x \equiv y \pmod q$ implică $x \approx y \pmod S$ și deci x și y fac parte din aceeași clasă de congruență atît din A/q cît și din $A/\approx$; adică clasele de congruență coincid.

Relația q este cea mai mare congruență pe A pentru care S este reuniune de q – clase. În acelaș timp acestea sînt și clasele congruenței $\approx$ care este cea mai mică congruență ce admite o clasă care-l conține pe S. De aici rezultă că S este clasă de congruență și această congruență este unică.

Reciproc, fie S clasa congruenței unice pe A. Atunci $\forall x, y \in A$, din condiția $x^\tau \in S \Leftrightarrow y^\tau \in S$ pentru toate translațiile τ trebuie să rezulte că $x \approx y\ (S)$.

$$x \equiv y \pmod{q} \text{ implică } x \approx y \pmod{q^*}$$

și rezultă că $q^* \subset q$. Deci orice clasă de congruență q^* este inclusă într-o clasă de congruență q. Clasa care-l conține pe S din A/q^* va fi inclusă în clasa ce conține pe S din A/q. Rezultă că aceste două clase trebuie să coincidă cu S. Dar S fiind clasa congruenței unica pe A avem $q = q^*$.

BIBLIOGRAFIE

1. D. M. Cohn, Universal Algebra, New-York 1965.
2. G. Grätzer, Universal Algebra, Van Nostrand, Princeton, 1967.
3. R. S. Pierce, Introduction to the Theory of Abstract Algebras 1968.

TRANSLATIONS SUR LES Ω – ALGEBRES

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage sont ètudiees quelques propriétès des congruences relations sur les Ω – algebres à l'aide des translations.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 1—1979**

DE

P. NĂSLĂU

Fie ecuaţia :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} + \nu \frac{dx}{dt} + \gamma x + \lambda \int_0^a H(t,s)\, x(s)\, ds = f(t) \tag{1}$$

cu condiţiile iniţiale : $x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0'$ (2)

Vor fi analizate unele cazuri în care soluţia acestei ecuaţii poate fi aproximată cu ajutorul soluţiilor unor ecuaţii mai simple.

1. Cazul cînd λ este un parametru mic iar funcţia $H(t, s)$ este mărginită pe $[0, a]\times[0, a]$

Se consideră ecuaţia (1) ca ecuaţie perturbată continuu după parametrul λ a ecuaţiei (degenerate) :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} + \nu \frac{dx}{dt} + \gamma x = f(t),\ x(0)=x_0,\ x_0'(0)=x_0' \tag{3}$$

Se caută soluţia problemei (1) — (2) sub forma unei serii după parametrul λ :

$$x(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k(t) \tag{4}$$

Funcţiile $x_k(t)$ se determină înlocuindu-se (4) în (1)—(2) şi identificîndu-se coeficienţii aceloraşi puteri ale parametrului λ. Rezultă problemele :

$$\mu \frac{d^2x_0(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx_0(t)}{dt} + \gamma x_0(t) = f(t),\ x_0(0)=x_0,\ x_0'(0)=x_0' \tag{5}$$

$$\mu \frac{d^2x_k(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx_k(t)}{dt} + \gamma x_k(t) = -\int_0^a H(t,s)\, x_k(s)\, ds,$$

$$x_k(0)=x_k'(0)=0\ ,\ k=1, 2, \ldots \tag{6}$$

Se observă că problema (5) este chiar problema degenerată (3) iar funcţiile $x_k(t)$ se determină unic prin rezolvarea succesivă a unor ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi.

Considerînd $X_n(t, \lambda)=\sum_{k=0}^{n} \lambda^k x_k(t)$, analog ca în teorema lui Vasilieva [2] rezultă că există $\lambda_0>0$ şi $c>0$ încît pentru $|\lambda|<\lambda_0$, $0\leqslant t\leqslant a$, are loc :

$$|x(t, \lambda)-X_n(t, \lambda)| \leqslant c\lambda^{n+1} \tag{7}$$

2. Cazul cînd $\mu>0$ este parametru mic, $\nu>0$, iar $H(t, s)$ are derivate parţiale continui pînă la ordinul $n+1$ prin raport cu fiecare variabilă.

Se consideră problema (1)—(2) ca fiind perturbată (singular) după parametrul μ a problemei (degenerate) :

$$\nu \frac{dx}{dt} + \gamma x + \lambda \int_0^a H(t, s)\, x(s)\, ds = f(t),\ x(0)=x_0 \tag{8}$$

şi se presupune deocamdată că problema (8) are soluţie unică.

În cazul unei perturbări singulare soluția problemei inițiale se caută sub forma unei sume de două serii [2]:

$$x(t, \mu^{k-}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \bar{x}_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k p_k(\tau) \tag{9}$$

unde $\tau = t/\mu$ iar funcțiile $p_k(\tau)$ îndeplinesc condiția la limită:

$$\lim_{\tau \to \infty} p_k(\tau) = 0 \tag{10}$$

Pentru determinarea succesivă a funcțiilor $x_k(t)$, $p_k(\tau)$ se înlocuiește (9) în (1) și (2) și se identifică coeficienții acelorași puteri ale lui μ, separat funcțiile de variabilă t de cele de variabilă τ. Pentru aceasta se descompune mai întîi termenul integral:

$$J \equiv H(t, s)\, x(s)\, ds; \quad K(t, s, \mu) \equiv H(t, s)\, x(s) = H(t, s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \bar{x}_k(s) +$$

$$+ H(t, s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k p_k(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H(t, s)\, \bar{x}_k(s) + H(t, \mu\delta) \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j p_j(\delta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H(t, s)\, \bar{x}_k(s) + \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \frac{\delta^i}{i!} \frac{\partial^i H(t, 0)}{\partial s^i} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j p_j(\delta) \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \bar{K}_k(t, s) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P_k(t, \delta), \text{ unde } \delta = s/\mu,$$

$$\bar{K}_k(t, s) \equiv H(t, s)\, \bar{x}_k(s), \quad P_k(t, \delta) \equiv \sum_{i=0}^{k} \frac{\delta^i}{i!} \frac{\partial^i H(t, 0)}{\partial s^i} P_{k-i}(\delta) \tag{11}$$

$$J = \int_0^a K(t, s, \mu)\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \int_0^a \bar{K}_k(t, s)\, ds + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \int_0^a P_k(t, \delta)\, ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \int_0^a \bar{K}_k(t, s)\, ds + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} \int_0^{\infty} P_k(t, \delta)\, d\delta \approx \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \int_0^a \bar{K}_k(t, s)\, ds +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} \int_0^{\infty} P_k(t, \delta)\, d\delta$$ (μ fiind parametru mic și fiind îndeplinită condiția (10), termenul $\int_{a/\mu}^{\infty} P_k(t, \delta)\, d\delta$ se poate neglija). Rezultă:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k J_k(t), \quad J_0(t) = \int_0^a \bar{K}_0(t, s)\, ds, \quad J_k(t) = \int_0^a \bar{K}_k(t, s)\, ds +$$

$$+ \int_0^{\infty} P_{k-1}(t, \delta)\, d\delta \tag{12}$$

Ținînd cont de (9) și (12), din (1) și (2) rezultă:

$$\mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\frac{d^2 \bar{x}_k}{dt^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d^2 P_k(\tau)}{d\tau^2} \right) + \nu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{d\bar{x}_k}{dt} + \frac{1}{\mu} \frac{dP_k(\tau)}{d\tau} + \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\bar{x}_k(t) +$$

$$+ P_k(\tau)) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} J_k(t) = f(t) \tag{13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\bar{x}_k(0)+P_k(0))=x_0,\ \sum \mu^k \left(\frac{d\bar{x}_k(0)}{dt}+\frac{1}{\mu}\frac{dP_k(0)}{d\tau}\right)=x_0' \qquad (14)$$

Înmulțind (13) și a doua relație (14) cu μ, se obțin prin identificare relațiile :

$$\nu \frac{d\bar{x}_0(t)}{dt}+\gamma\bar{x}_0(t)+J_0(t)=f(t),\ \frac{d^2\bar{x}_{k-1}}{dt^2}+\nu\frac{d\bar{x}_k}{dt}+\gamma\bar{x}_k+\lambda J_k=0$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (15)$$

$$\frac{d^2P_0(\tau)}{d\tau^2}+\nu\frac{dP_0(\tau)}{d\tau}=0,\ \frac{d^2P_k(\tau)}{d\tau^2}+\nu\frac{dP_k(\tau)}{d\tau}+P_{k-1}(\tau)=0\ \ k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (16)$$

$$\bar{x}_0(0)+P_0(0)=x_0,\ P_0'(0)=0,\ \frac{d\bar{x}_0(0)}{dt}+\frac{dP_1(0)}{d\tau}=x_0' \qquad (17)$$

$$\bar{x}_k(0)+P_k(0)=0,\ \frac{d\bar{x}_k(0)}{dt}+\frac{dP_{k+1}}{d\tau}=0,\ k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (18)$$

Algoritmul determinării funcțiilor $x_k(t)$, $P_k(\tau)$ este următorul :

Etapa 1 : Se asociază primei ecuații (15) condiția $\bar{x}_0(0)=x_0$:

$$\nu\frac{d\bar{x}_0(t)}{dt}+\gamma\bar{x}_0(t)+\lambda\int_0^a H(t,\ s)\,\bar{x}_0(s)\,ds=f(t),\ \bar{x}_0(0)=x_0 \qquad (19)$$

Problema (19) este chiar problema degenerată (8). Rezultă soluția $\bar{x}_0(t)$.

Etapa 2 : Se rezolvă prima ecuație (16). Din (17) și (19) rezultă că trebuie asociate condițiile : $p_0(0)=p_0'(0)=0$. Rezultă $p_0(\tau)\equiv 0$.

Etapa 3 : Din (16) pentru $k=1$ rezultă ecuația : $\frac{d^2p_1(\tau)}{d\tau^2}+\nu\frac{dp_1(\tau)}{d\tau}+\gamma p_0(\tau)=0$, care, deoarece $p_0(\tau)\equiv 0$, are soluția generală $p_1(\tau)=A+Be^{-\nu\tau}$. Din (17) rezultă că trebuie asociată condiția : $dp_1/d\tau=x_0'-\bar{x}_0'(0)$. A doua condiție rezultă din (10). Rezultă soluția $p_1(\tau)=\frac{1}{\nu}(\bar{x}_0'(0)-x_0')\,e^{-\nu\tau}$.

Etapa 4 : Din (15), pentru $k=1$, deoarece $p_0(\tau)\equiv 0$ rezultă :

$$\nu\frac{d\bar{x}_1(t)}{dt}+\gamma\bar{x}_1(t)+\lambda\int_0^a H(t,\ s)\,\bar{x}_1(s)\,ds=-\frac{d^2\bar{x}_0(t)}{dt^2} \qquad (20)$$

Din (18) rezultă condiția $\bar{x}_1(0)=-p_1(0)$. Această problemă este de același tip cu (8). Rezultă soluția $\bar{x}_1(t)$.

Etapa $2k+1$, $k=2,\ 3,\ \ldots$ Ecuația

$\frac{d^2p_k(\tau)}{d\tau^2}+\nu\frac{dp_k(\tau)}{d\tau}=-\gamma p_{k-1}(\tau)$ are soluția generală :

$$p_k(\tau)=-\frac{\gamma}{\nu}\int_0^\tau p_{k-1}(s)\,ds+\frac{\gamma}{\nu}e^{-\nu\tau}\int_0^\tau e^{\nu s}p_{k-1}(s)\,ds+A+Be^{-\nu\tau}\equiv(Q_{k-1}(\tau)+B)\,e^{-\nu\tau}+A,$$

unde $Q_{k-1}(\tau)$ e un polinom determinat de gradul $k-1$. Din (10) rezultă $A=0$ iar B se determină din condiția : $\frac{dP_k(0)}{d\tau}=-\frac{d\bar{x}_{k-1}(0)}{dt}$

Etapa $2k+2$, $k=2,\ 3,\ \ldots$ Ecuația

$$\nu\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt}+\gamma\bar{x}_k(t)+\lambda\int_0^a H(t,s)\,\bar{x}_k(s)\,ds=-\frac{d^2\bar{x}_{k-1}(t)}{dt^2}-\lambda\int_0^\infty P_{k-1}(t,\ \delta)\,d\delta \qquad (21)$$

cu condiția $\bar{x}_k(0)=-p_k(0)$ este de același tip cu (8). Rezultă soluția $\bar{x}_k(t)$.

Din teorema lui Vasilieva [2] rezultă o evaluare a restului de forma (7) (cu μ în loc de λ).

2 a. Cazul cînd în plus față de cazul 2, γ este un parametru mic (sau zero).

Analog ca în cazul 1, problemele (8), (20) și (21) se pot considera ca fiind perturbate continuu după parametrul γ și se reduc la rezolvarea unei probleme de tipul:

$$\nu \frac{ax(t)}{dt} + \lambda \int_0^a H(t, s)\, x(s)\, ds = f(t),\ x(0) = x_0 \tag{22}$$

Soluția acestei ecuații se poate aproxima printr-o metodă numerică. De exemplu, se aproximează integrala cu metoda trapezelor în punctele rețelei $s_i = ih$, $h = a/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Rezultă

$$\nu \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + \lambda h \sum_{j=0}^{n} A_j H(t, s_j)\, \tilde{x}(s_j) = f(t),\ \tilde{x}(0) = x_0 \tag{23}$$

unde $A_0 = A_n = 1/2$, $A_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Considerînd $\tilde{x}(s_j)$ constante nedeterminate rezultă prin integrare:

$$\tilde{x}(t) = -\frac{\lambda h}{\nu} \sum_{j=0}^{n} A_j \tilde{x}(s_j) \int_0^t H(y, s_j)\, dy + \int_0^t f(y)\, dy + x_0$$

Pentru $t = s_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ rezultă un sistem algebric liniar cu necunoscutele $k_i = \tilde{x}(s_i)$. Presupunînd determinantul său nenul rezultă unic funcția de rețea $\{k_i\}$, $k_i = \tilde{x}(s_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$ și de aici soluția

$$\tilde{x}(t) = -\frac{\lambda h}{\nu} \sum_{j=0}^{n} A_j k_j \int_0^t H(y, s_j)\, dy + \int_0^t f(y)\, dy + x_0$$

Această soluție este stabilă dacă $\sup_{t \in [0, a]} |H(t, s)| \equiv q < \eta < \frac{\nu}{|\lambda| a^2}$: Considerînd soluția $x^*(t)$ a ecuației

$$\frac{dx^*(t)}{dt} + \lambda h \sum_{j=0}^{n} A_j H(t, s_j)\, x^*(s_j) = f(t) + \varepsilon(t)$$

rezultă prin scăderea expresiilor celor două soluții:

$$t \sup_{s \in [0, t]} |\varepsilon(s)| \geqslant \left| \int_0^t \varepsilon(s)\, ds \right| \geqslant |\tilde{x}(t) - x^*(t)| - \frac{|\lambda| h}{\nu} \sum_{j=0}^{n} A_j \sup_j |\tilde{x}(s_j) - x^*(s_j)| \, tq;$$

de unde:

$$a \cdot \|\varepsilon(t)\| \equiv a \sup_{t \in [0, a]} |\varepsilon(t)| \geqslant \sup_{t \in [0, a]} \left(t \sup_{s \in [0, t]} |\varepsilon(s)|\right) \geqslant \sup_{t \in [0, a]} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| -$$

$$- \frac{|\lambda| haq}{\nu} \sup_{t \in [0, a]} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| = \left(1 - \frac{|\lambda| a^2 q}{\nu}\right) \sup_{t \in [0, a]} |\tilde{x}(t) - x^*(t)|. \text{ Deci}$$

$$\|\tilde{x}(t) - x^*(t)\| \equiv \sup_{t \in [0, a]} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| \leqslant c \cdot \|\varepsilon(t)\| \text{ unde } c = a/(1 - |\lambda| a^2 q/\nu)$$

BIBLIOGRAFIE

1. S. K. Godunov, V. S. Reabenki — Scheme de calcul cu diferențe finite. Editura tehnică, București, 1977.
2. A. B. Vasilieva, V. F. Butuzov — Asimptoticeskie razlojenia reşenii singuliarno vozmuşcennîk uravnenii. Nauka-Moskva, 1973.

ON A INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

SUMMARY

It is studied the case when one or two parameters of equation

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} + \nu \frac{dx}{dt} + \gamma x + \lambda \int_0^a H(t, s)\, x(s)\, ds = f(t)$$

are smalls and its solution is approximated with the solutions of some simpler equations.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 1 —1979**

COOMOLOGIE PE O VARIETATE ANALITICĂ COMPLEXĂ FOLIATĂ CU COEFICIENŢI ÎNTR-UN FASCICOL DE GERMENI DE FORME FOLIATE

DE

IOSEFINA MIHUŢ

Fie V^{n+m} o varietate analitică complexă paracompactă de dimensiune $n+m$ înzestrată cu o foliaţie m — dimensională, *i.e.* există un atlas analitic complex pe V, $\mathcal{A}=\{U_\alpha^a,\ (z_\alpha^a,\ z_\alpha^u)\}$ aşa ca pe $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing : \frac{\partial z_\beta^a}{\partial z_\alpha^u}=0$, $(a=1,\ \ldots,n$; $u=n+1,\ \ldots,\ n+m)$.

O funcţie diferenţiabilă f pe V se zice foliată dacă au loc relaţiile $\frac{\partial f}{\partial z_\alpha^u}=0$, invariante în atlasul considerat.

O formă diferenţială pe V este complexă [4] foliată dacă expresia sa locală nu conţine dz^u, $d\bar{z}^u$ şi are local coeficienţi foliaţi. Dacă forma diferenţială este în plus şi analitică vom nota a.c.f.

În cele ce urmează vom nota prin Φ, $\Phi^{(p,q)}$, $O^{(p,o)}$, Φ^p, $A^{(p,q)}$ respectiv fascicolele de germeni de funcţii diferenţiabile foliate, de forme diferenţiale de tip $(p,\ q)$ foliate, de forme analitice de tip $(p,\ 0)$, de p — forme *a.c.f*, de forme diferenţiale de tip $(p,\ q)$ pe V.

Cum în general Φ, $\Phi^{(p,q)}$ nu sînt fine ne propunem să calculăm grupurile de coomologie pe V cu coeficienţi în aceste fascicole, *i.e.* $H^t(V,\ \Phi)$ respectiv $H^t(V,\ \Phi^{(p,q)})$ cu ajutorul operatorului d'' introdus în [3].

Pentru aceasta vom demonstra pentru operatorul d'' o lemă de tip Poincaré :

LEMA. În diagrama (*), liniile sînt exacte.

Pentru demonstraţie procedăm prin inducţie relativ la indicele liniei ; din rezultate cunoscute, diagrama (*) are primele două linii [4] şi coloanele [1] exacte. Presupunem deci linia (q) exactă. Cum $d''^2=0$ [3], demonstrăm doar că $\ker d''_{s+1,q+1} \subset im d''_{s,q+1}$.

CAZUL I : fie $\omega \in \ker d''_{s+1,q+1} \cap im\ \bar{\partial}_{s+1,q}$, deci există $\alpha \in A^{(p+s+1,q)}$ aşa ca $\omega=\bar{\partial}_{s+1,q}\alpha$

1.a) dacă $\alpha \in \ker d''_{s+1,q}=im d''_{s,q}$ atunci există $\beta \in A^{(p+s,q)}$aşa ca $\alpha=d''_{s,q}\ \beta$ deci $\omega \in im d''_{s,q+1}$

1.b) dacă $\alpha \in A^{(p+s+1,q)}$, $\ker d''_{s+1,q}$ cum $\bar{\partial}_{s+2,q} d''_{s+1,q}\ \alpha=0$ deducem din lema Grothendieck-Dolbeault existenţa unei $\gamma \in A^{(p+s+2,q-1)}$ aşa ca $\bar{\partial}_{s+2,q-1}\gamma=$ $=d''_{s+1,q}\ \alpha$, adică $d''_{s+1,q}\ \alpha \in im\bar{\partial}_{s+2,q-1}$; repetînd raţionamentul obţinem :

2.a) dacă $\gamma \in \ker\ d''_{s+2,q-1}=im\ d''_{s+1,q-1}$ există $\delta \in A^{p+s+1,q-1}$ aşa ca $\bar{\partial}_{s+2,q-1} d''_{s+1,q-1}\ \gamma=d''_{s+1,q}\ \alpha=-d''_{s+1,q}\ \bar{\partial}_{s+1,q-1}\delta$ deci $\alpha \in im\ \bar{\partial}_{s+1,q-1}$ şi $\omega=0$, trivial.

2.b) dacă $\gamma \in A^{(p+s+2,q-1)}\ \ker d''_{s+2,q-1}$ raţionînd ca la 1.b) deducem

3.b) existența unei forme $\varepsilon \in A^{(p+s+3,q-2)} \setminus ker\ d''_{s+3,q-2}$ așa ca $\bar{\partial}_{s+2,q-2}\varepsilon = d''_{s+2,q-1}\gamma, \ldots$, în sfîrșit pentru $\eta \in A^{(n+m-1-(n+m)+q+(s+2)} \setminus ker\ d''_{n+m-1-(n+m)+s+2+q}$ există $\mu \in A^{(n+m)-(n+m)+s+2+q)}$ așa ca $\bar{\partial}_{n+m-(n+m)+s+2+q}\mu = d''_{n+m-1,-(n+m)+s+2+q}$ n și cum $d''_{n+m-1,-(n+m)+s+2}$ e surjecție deducem existența unei forme $\xi \in \in A^{(n+m-1,-(n+m)+s+2+q}$ așa ca : $d''_{n+m-1-(n+m)+s+2+q}\ \xi = \mu$ deci $\omega = 0$.

CAZUL II : fie $\omega \in (A^{(p+s+1,q+1)}\ im\ \bar{\partial}_{s+1,q}) \bigcap ker d''_{s+1,q+1}$, atunci cum $\bar{\partial}_{s+1,q+1} ker\ d''_{s+1,q+1} \subset ker\ d''_{s+1,q+2}$ deducem că $\Omega = \bar{\partial}_{s+1,q+1}\ \omega \in ker d''_{s+1,q+2}$; demonstrăm existența unei forme $\tau \in A^{(p+s,q+1)}$ pentru care $d''_{s,q+2}\ \bar{\partial}_{s,q+1}\tau = -\bar{\partial}_{s+1,q+1}\ d''_{s,q+1}\ \tau = \Omega$ și deci $\omega = -d''_{s,q+1}\ \tau$ prin reducere la absurd: contrar, presupunem că pentru orice $\tau \in A^{(p+s,q+1)}$ are loc relația $(d''_{s,q+1}\ \bar{\partial}_{s,q+1} + \bar{\partial}_{s+1,q+1} d''_{s,q+1})\ \tau = \Delta \in A^{(p+s+1,q+2)}$ și $\Delta \neq 0$. Deducem atunci că $\bar{\partial}_{s+1,q+2} \cdot d''_{s,q+2}\ \bar{\partial}_{s,q+1}\tau = \bar{\partial}_{s+1,q+2}\Delta$, deci $\Delta = d''_{s,q+2}\ \bar{\partial}_{s,q+1}\tau$ și atunci $\Omega = 0$, absurd, *q.e.d.*

Cum fascicolele $A^{(p,q)}$ sînt fine, din teorema abstractă a lui de Rham rezultă :

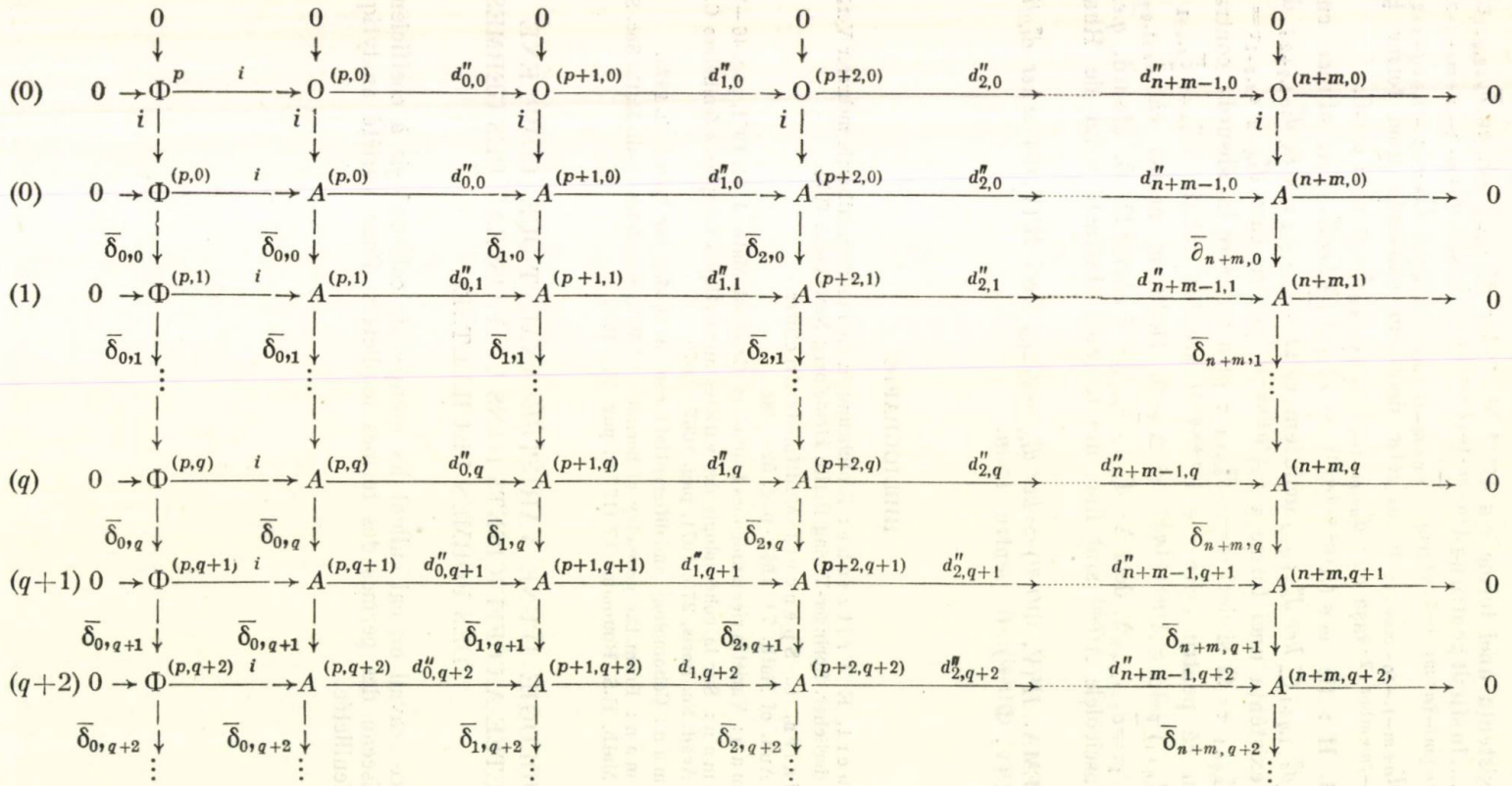
TEOREMA. $H^t(V, \Phi^{(p,q)}) \simeq ker\ d''_{t,q}/im d''_{t-1,q}$ Deci $H^t(V, \Phi) \simeq ker\ d''_{t,0}/\text{im}\ d''_{t-1,0}$ și $H^t(V, \Phi^{(p,q)}) = 0$ pentru $t > m$.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Grauert, K. Fritzsche: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1974.
2. K. Kodaira, C. Spencer: Multifoliate structures. Ann. of Math. 74, 1961, pag. 52—100.
3. I. Vaisman: Variétés riemanniennes feuilletées. Czechosl. Math. J. 21, 1971, pag. 46—75.
4. I. Vaisman: Sur la cohomologie des variétés annalytiques complexes fenillétées C.R. Acad. Sc. Paris, 273, 1971, pag. 1067—1070
5. I. Vaisman: Cohomology and differential forms. M. Dekker Inc, New Iork, 1973.
6. I. Vaisman: From the geometry of hermitian foliate manifolds. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie 17 (1973), pag. 71—100.

COHOMOLOGIE D'UNE VARIÉTÉÉ ANALYTIQUE COMPLEXE FEUILLETÉE A COEFFICIENTS DANS UN FAISCEAU DES GERMES DES FORMES FEUILLETÉES

Dans ce travail on cal cullent les groupes de cohomologie à coefficients dans le faisceau des germes des formes feuilletées d'une variété analytique complexe feuilletée.


(0) 0 → Φ → O → O → O → O → O → 0
(0) 0 → Φ → A → A → A → A → A → 0
(1) 0 → Φ → A → A → A → A → A → 0
(q) 0 → Φ → A → A → A → A → A → 0
(q+1) 0 → Φ → A → A → A → A → A → 0
(q+2) 0 → Φ → A → A → A → A → A
(*)

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) Fascicola 1—1979

ASUPRA EXISTENŢEI UNOR OPERATORI DIFERENŢIALI FOLIAŢI PE VARIETĂŢI ANALITICE COMPLEXE FOLIATE

DE

IOSEFINA MIHUŢ

Lucrarea îşi propune să determine obstrucţia coomologică la existenţa de operatori diferenţiali foliaţi de un simbol dat pentru cazul unei varietăţi analitice complexe foliate.

Fie V o varietate Stein paracompactă.

Un fibrat analitic complex (P, π, V) se zice foliat [4] dacă are o trivializare locală astfel ca funcţiile sale de tranziţie să fie analitice complexe foliate (*f.v.a.c.f.*)

Un operator diferenţial D de ordin k, $D : P \to R$ se va numi foliat dacă există şi e comutativă diagrama:

$$(1)\quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{D'} & R \\ = & & = \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ = & & = \\ P & \xrightarrow{D} & R \end{array}$$

unde i este incluziunea, P, R sînt două *f.v.a.c.f.* peste V, $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{R}}$ resp. $\underline{\underline{\underline{P}}}$, $\underline{\underline{\underline{R}}}$ fiind fascicolele de germeni de secţiuni analitice resp. de secţiuni analitice foliate ale lui P resp. R.

Fie $J^k_p P$ resp. $J^k_f P$ *f.v.a.c.* resp. *f.v.a.c.f.* de k — jeturi ale lui P şi $Tr = T(V)/T(F)$, cu $T(F)$ fibratul structural al spaţiului F al follilor lui V. [4].

Din [3], [4] se ştie că şirul:

$$(2)\qquad 0 \to \underline{\underline{L^k_s(Tr, P)}} \to \underline{\underline{J^k_f P}} \to \underline{\underline{J^{k-1}_f P}} \to 0$$

este exact, cu $L^k_s(Tr, P)$ fibratul a cărui fibră în x este spaţiul $L^k_s(Tr_x, P_x)$ al aplicaţiilor k — liniare şi simetrice ale lui Tr_x în P_x. Atunci şi şirul

$$(3)\qquad 0 \to \underline{\underline{L(J^{k-1}_f P, R)}} \to \underline{\underline{L(J^k_f P, R)}} \xrightarrow{e'_f} \underline{\underline{L(L^k_s(Tr, P), R)}} \to 0$$

este exact.

Cum V e paracompactă şi şirul

$$(4)\qquad 0 \to H^0(V, L(J^{k-1}_f P, R)) \to H^0(V, L(J^k_f P, R)) \xrightarrow{e^*_f} \to H^0(V, L(L^k_s(Tr, P), R)) \xrightarrow{\delta} H^1(V, L(J^{k-1}_f P, R)) \to \ldots$$

este exact.

Dat un simbol abstract foliat [4], $s' : L^k_s(Tr, P) \to R$ din (4) deducem că el este un element al lui $H^0(V, \underline{\underline{L^k_s(L(Tr, P), R)}}$ căruia prin aplicaţia δ

îi corespunde $\delta(s') \in H^1(V, L(J_f^{k-1}P, R))$. Într-adevăr, dată o acoperire $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$ deschisă a lui V, sistemul de secțiuni $\{s'|_{U_\alpha}\}$ reprezintă în coomologia Čech pe V un 0 – cociclu al lui $\mathfrak{U}$ cu coeficienți în $L(L_s^k(Tr, P), R.)$ V fiind Stein șirul exact

$$0 \to L_s^k(Tr, P) \xrightarrow{\varepsilon_f} J_f^k P \to J_f^{k-1}P \to 0 \tag{5}$$

splitează și fie μ o retractă corespunzătoare. Cum $0-$ colanțul $\{s'\mu(U_\alpha)\}$ al lui $\mathfrak{U}$ cu coeficienți în $L(J_f^k P, R)$ e dus prin ε_f' în cociclul $\{s' \mid_{U\alpha}\}$, $1-$ cociclul lui $\mathfrak{U}$ cu coeficienți în $L(J_f^{k-1} P, R)$ definit prin:

$$\{[s'\mu(U_\alpha) - s'\mu(U_\beta)](r_f^{k-1}) \mid_{U_\alpha \cap U_\beta}\} \tag{6}$$

reprezintă pe $\delta(s')$.

Am reprodus acest calcul din [4] întrucît el este necesar în demonstrația teoremei ce va urma.

Prin definiție $\delta(s')$ se va numi obstrucția la existența operatorului D' pentru un D dat și se știe că D' există atunci numai cînd $\delta(s')=0$, [4].

Fie $A^{p,q}(L(J_f^{k-1} P, R))$ fascicolul de germeni de forme de tip mixt (p, q), $L(J_f^{k-1} P, R)$ – valuate și $\lambda : A^{p,q} - A^{p,q+1}$ operatorul de tip $(0, 1)$ introdus în [5]. Tot din [5] se știe că

$$H^i(V, L(J_f^{k-1}P, R)) \simeq Z^{oi}(L(J_f^{k-1}P, R))/A^{q,i-1}(L(J_f^{k-1}P, R)) \tag{7}$$

deci $\delta(s')$ poate fi reprezentat printr-o formă de tip mixt $(0, 1)$, $\lambda-$ închisă și $L(J_f^{k-1} P, R)$ – valuată pe care o vom determina.

Pentru $i=1$ din exactitatea șirului

$$0 \to L(J_f^{k-1}P, R) \to A^{0,0}(L(J_f^{k-1}P, R) \xrightarrow{\lambda_0} ker_1 \to 0 \tag{8}$$

λ_i fiind λ aplicat formelor de tip mixt $(0, i)$, deducem șirul exact

$$\ldots \to H^0(V, A^{0,0}(L(J_f^{k-1}P, R)) \to H^0(V, ker\,\lambda_1) \xrightarrow{\delta'} \to H^1(V, L(J_f^{k-1}P, R)) \to 0 \tag{9}$$

Reciproc, dată o formă, $L(J_f^{k-1} P, R)-$ valuată, de tip mixt $(0,1)$ și λ – închisă, ea poate fi reprezentată pentru acoperirea $\mathfrak{U}$ prin 0 – cociclul $\{\omega \mid_{U_\alpha}\}$ pentru $ker\,\lambda_1$; cum λ satisface lema Grothendieck – Dolbeault, pentru orice U_α există o secțiune în $L(J_f^{k-1} P, R)$ notată $\sigma(U_\alpha)$ așa ca $\lambda\sigma(U) = \omega \mid_{U_\alpha}$. Se obține astfel 0 – cociclul $\{\lambda\sigma(U_\alpha)\}$ pentru $\ker \lambda_1$, cu $\{\sigma(U_\alpha)\}$ un 0 – colanț pentru $A^{0,0}(L(J_f^{k-1} P, R))$. Luînd $\sigma(U_\alpha)=s'(\mu(U_\alpha)-\mu \mid_{U_\alpha})\cdot(r_f^{k-1})^{-1}$ aceasta este într-adevăr o secțiune (în general nefoliată) a lui $L(J_f^{k-1} P, R)$ și din (6) deducem că într-adevăr:

$$\omega = \lambda(\sigma(U_\alpha)) \tag{10}$$

Din definiția lui δ' deducem că 1 – cociclul lui $A^{0,0}$ dat prin $\{\sigma(U_\alpha) - \sigma(U_\beta) \mid_{U_\alpha \cap U_\beta}\}$ reprezintă tocmai pe $\delta'\omega$, iar din (7) lui $\delta'\omega$ îi corespunde

clasa de λ – coomologie a lui ω, pentru $i=1$; din (6) rezultă că 1 – cociclul ce definește pe $\delta(s')$ poate fi pus și el sub forma $\{\sigma(U_\alpha)-\sigma(U_\beta) \mid_{U_\alpha \cap U_\beta}\}$, deoarece pentru fiecare U avem: $(\mu(U_\alpha)-\mu \mid_{U_\alpha}) \varepsilon_f=0$

Evident ω nu depinde de retracta μ, căci luînd alta u' și definind secțiunile $\sigma'(U_\alpha)$ corespunzătoare, $\sigma'(U_\alpha^{\xi})-\sigma(U_\tau)$ sînt foliate și deci $\lambda\sigma'=\lambda\sigma$; cu aceasta am demonstrat:

TEOREMA. Dat $s': L_s^k(Tr, P) \to R$ un simbol abstract foliat, obstrucția corespunzătoare $\delta(s')$ este clasa de λ – coomologie a formei ω dată prin (10), care e o formă $L(J_f^{k-1}P, R)$ – valuată λ – închisă, de tip mixt (0, 1) pe V.

BIBLIOGRAFIE

1. Atiyah, M. F.: Complex annalytic connections in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181–207.
2. Haefliger, A: Variétés feuilletées, Scuola Norm. Sup. Pisa, 16 (1962), 367–397.
3. Palais, R. S.: Seminar on the Atiyah – Singer index theorem. Chap. IV, Annals of Math. Studies, 57, Princeton, 1965, 51–93.
4. Vaisman, I.: Remarks about differential operators on foliate manifolds. An șt. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, XX, 1974, 327–350.
5. Vaisman, I.: Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes feuilletées. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, 1067–1070.

ON THE EXISTENCE OF FOLIATE DIFFERENTIAL OPERATORS ON FOLIATE COMPLEX ANALYTIC MANIFOLDS

SUMMARY

In this paper we calculate the obstruction to the existence of foliate differential operators of a given foliate abstract symbol, on foliate manifolds.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) **Fascicola 1—1979**

ASUPRA CONTROLABILITĂŢII SISTEMELOR LINIARE ÎN SPAŢII BANACH

DE
P. TOPUZU şi E. TOPUZU

0. **Noţiuni introductive.** Studiul problemelor de control şi control optimal în spaţii Banach, au izvorît din necesitatea de rezolvare a unor probleme de control pentru ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. Spaţiul stărilor unor astfel de sisteme (impuse de necesităţi practice) este de dimensiune infinită. Un studiu profund şi elegant al acestei problematici poate fi făcut numai în cadrul general al spaţiilor Banach, folosind puternicul instrument pus la dispoziţie de analiza funcţională.

Sistemele liniare cu control în spaţii infinit dimensionale sînt intens investigate începînd cu deceniul trecut (A. V. Balakrishnan, H. O. Fattorini, R. Triggiani, etc.)

În prezenta lucrare vom extinde la cazul sistemelor liniare cu control în spaţii Banach, cîteva proprietăţi cunoscute în cazul finit dimensional. Astfel se extinde noţiunea de valoare proprie controlabilă, sînt puse în evidenţă cîteva proprietăţi ale sistemelor complet controlabile şi sînt prezentate condiţii echivalente cu controlabilitatea completă (Teorema 3.1). În ultima parte se prezintă o condiţie necesară de controlabilitate completă (Propoziţia 3.2) şi se arată printr-un contraexemplu că reciproca este falsă în cazul infinit dimensional.

1. **Definiţii şi notaţii.** Fie X şi U spaţii Banach separabile ; X^* va nota dualul topologic al spaţiului X, iar $L(U, X)$ spaţiul Banach al operatorilor liniari şi mărginiţi de la U în X ; în particular, $L(X, X)$ va fi notat $\tilde{X}$. Pentru $A \in \tilde{X}$ operatorul adjunct va fi notat A^*, iar operatorul rezolvant va fi notat ca de obicei prin $R(\lambda, A)=(A-\lambda I)^{-1}$ pentru λ din mulţimea rezolventă. Prin $L^p_{loc}(R_+, U)$ vom nota spaţiul Fréchèt al tuturor funcţiilor $u(\cdot)$ de la R_+ la U, tare măsurabile şi local p — integrabile în normă.

Fie $A \in \tilde{X}$, $B \in L(U, X)$, $\mathcal{U}=L^1_{loc}(R_+, U)$. Pentru fiecare $u(\cdot)$ soluţia sistemului

$$(A, B) \quad \dot{x}=Ax+B$$

cu condiţia iniţială $x(0)=x_0$ este dată de binecunoscuta formulă

$$(1) \qquad x(t\,;\, x_0,\, u(\cdot))=e^{AT}x_0+\int_0^T e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

Definiţia 1.1 (H. A. Antosiewicz, 1963). Fie $\varepsilon \geqslant 0$, $T>0$. Sistemul (A, B) se zice ε — controlabil pe $[0, T]$ dacă oricare ar fi x_0, $x_1 \in X$ există o funcţie de control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ astfel încît

$$\| x(T\,;\, x_0,\, u(\cdot))-x_1 \| \leqslant \varepsilon$$

Dacă sistemul (A, B) este ε – controlabil pe $[0, T]$ pentru orice $\varepsilon > 0$ vom zice (după H. O. Fattorini [3]) că sistemul (A, B) este complet controlabil pe $[0, T]$ și vom scrie [8] $(A, B) \in \Sigma_c$.

Propoziția 1.1 (Triggiani [12]). Următoarele afirmații sînt echivalente:

$a)$ $(A, B) \in \Sigma_c$

$b)$ $\bigvee_{n=0}^{\infty} A^n BU = X$

$c)$ $\bigcap_{n=0}^{\infty} Ker\, B^* (A^*)^n = \{0\}$

unde $\bigvee_{n=0}^{\infty} A^n BU$ reprezintă acoperirea lineară închisă a mulțimii $\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n BU$.

2. **Valori spectrale controlabile.** La acest punct se generalizează noțiunea de valoare proprie controlabilă [4].

Reamintim că spectrul contractiv al unui operator $A \in \tilde{X}$ este mulțimea

$$\sigma_k(A) = \{\lambda \in C;\ \overline{(A - \lambda I) X} \neq X\}$$

unde prin $\overline{(A - \lambda I) X}$ am notat aderența mulțimii $(A - \lambda I) X$. Evident în cazul finit dimensional $\sigma_k(A)$ coincide cu mulțimea valorilor proprii ale operatorului A.

Definiția 2.1 $\lambda \in \sigma_k(A)$ se zice valoare spectrală controlabilă pentru sistemul (A, B) sau valoare spectrală (A, B) – controlabilă dacă operatorul $(A - \lambda I, B) : X \oplus U \to X$ are domeniul valorilor dens în X, unde prin $\oplus$ am notat suma directă, iar $(A - \lambda I, B)(x + u) = (A - \lambda I) x + Bu$.

Observația 2.1 În cazul X, U de dimensiune finită definiția precedentă coincide cu cea dată în [4] pentru valoare spectrală controlabilă.

Observația 2.2 $\sigma_k(A)$ este (A, B) – controlabilă dacă și numai dacă $(A^* - \lambda I, B^*) : X^* \to X^* \oplus U^*$ este injectiv.

Propoziția 2.1 Dacă $(A, B) \in \Sigma_c$ atunci oricare ar fi $\lambda \in \sigma_k(A)$, λ este (A, B) – controlabilă.

Demonstrație. Fie $(A, B) \in \Sigma_c$. Presupunem că există $\lambda_0 \in \sigma_k(A)$ care nu este (A, B) – controlabilă. În virtutea observației 2.2, $(A^* - \lambda_0 I, B^*) : X^* \to X^* \oplus U^*$ nu este injectiv și în consecință, există o funcțională nenulă $x_0^* \in X^*$, pentru care $A^* x_0^* = \lambda_0 x_0^*$ și $B^* x_0^* = 0$. De aici, $\bigcap_{n=0}^{\infty} Ker B^* A^* \ni x_0^*$ și invocînd propoziția 1.2 obținem $(A, B) \notin \Sigma_c$, contradicția obținută demonstrînd afirmația

Observația 2.3 Reciproca afirmației precedente (adevărată pentru cazul finit dimensional) se dovedește falsă în cazul spațiilor Banach arbitrare ($\sigma_k(A) = \varnothing$, $B = 0$). Astfel, în cazul infinit dimensional, condiția oricare ar fi $\lambda \in \sigma_k(A)$, λ este (A, B) – controlabilă, este condiția necesară pentru ca $(A, B) \in \Sigma_c$.

Propoziția 2.2 $(A, B) \in \Sigma_c$ dacă și numai dacă A^* nu admite subspații invariante în $Ker B^*$.

Demonstrație. Afirmația $(A, B) \notin \Sigma_c$ este echivalentă, în virtutea propoziției 1.1, cu

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} Ker B^* (A^*)^n = X_0^* \neq \{0\}$$

și afirmația propoziției rezultă acum din faptul că subspațiul X_0^* este invariant la A^* și este conținut în $Ker B^*$.

Corolar 2.1 Fie $(A, B) \in \Sigma_c$ și D un operator arbitrar din $\mathfrak{L}(X, U)$, atunci $(A+BD, B) \in \Sigma_c$. Demonstrația rezultă imediat observînd că pentru orice subspațiu $X_0^* \subset Ker B^*$ au loc egalitățile

$$(A+BD)^* X_0^* = (D^*B^* + A^*) X_0^* = A^* X_0$$

din care rezultă că X_0^* este invariant la $(A+BD)^*$.

Corolar 2.2 Fie $(A, B) \in \Sigma_c$, $D \in \mathfrak{L}(X, U)$ și $Q \in \tilde{U}$, inversabil. Atunci $(A+BD, BQ) \in \Sigma_c$.

Demonstrație. Evident, din corolarul 2.1 și egalitatea $Ker Q^* B^* = Ker B^*$

Corolar 2.3 Dacă $(A, B) \notin \Sigma_c$ și $\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ converge pe o vecinătate a spectrului operatorului A, atunci $(\varphi(A), B) \notin \Sigma_c$.

Demonstrație. Din ipoteză subspațiul $X_0^* = \bigcap_{k=0}^{\infty} Ker B^* (A^*)^k \neq \{0\}$. Fie $x_0^* \in X_0^* \setminus \{0\}$. Atunci $\varphi(A^*) x_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A^*)^n x_0^*$ și pentru orice $k \in Z_+$ $B^*(A^*)^k \varphi(A)^* x_0^* = B^*(A^*)^k \varphi(A^*) x_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B^* (A^*)^{n+k} x_0^* = 0$. Astfel, $X_0^* \subset Ker B^*$ și este invariant la $\varphi(A)^*$.

Corolar 2.4 Fie X, U finit dimensionale. Atunci $(A, B) \in \Sigma_c$ dacă și numai dacă rang $(A - \lambda I, B) = n$, pentru orice valoare proprie $\lambda \in \sigma(A)$.

Observația 2.4 Rang $(A - \lambda I, B) = n$ este evident echivalent cu următoarea afirmație: Oricare ar fi $\eta \in X$ cu proprietatea $\eta A = \lambda \eta$ și $\eta B = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$. Altfel zis, A^* nu are vectori proprii în nucleul lui B^*.

Demonstrația corolarului 2.4. $(A, B) \notin \Sigma_c$ este echivalent, conform propoziției 2.2, cu proprietatea că există un subspațiu nenul $X_0^* \subset Ker B^*$, invariant la A^*. Deorece X_0^* este finit dimensional și $A X_0^* \subset X_0^*$, $\exists \eta^* \neq 0$, $\eta^* \in X_0^*$, astfel ca $A^* \eta^* = \lambda \eta^*$.

Reciproc, dacă există $\eta^* \neq 0$ cu $B\eta^* = 0$ și $A^* \eta^* = \lambda \eta^*$ atunci, evident, $\eta^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} Ker B^* (A^*)^k$ și $(A, B) \notin \Sigma_c$.

3. **Sisteme complet controlabile simple.** Un sistem (A, B) se zice simplu dacă U coincide cu mulțimea numerelor reale (sau complexe). În acest caz există $b \in X$ astfel ca $Bu = bu$ $\forall u \in U$. Se obișnuiește să se noteze un astfel de sistem prin (A, b), punînd în evidență vectorul corespunzător $b \in X$.

Observația 3.1 Enunțul propoziției 1.1 capătă forme corespunzătoare înlocuirii lui B prin vectorul $b \in X$. Astfel, putem enunța:

Propoziția 3.1 Următoarele afirmații sînt echivalente:

a) $(A, b) \in \Sigma_c$

b) $\bigvee_{n=0}^{\infty} A^n b = X$

c) Nu există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ astfel încît $x^* e^{At} b = 0$ $\forall t \in [0, T]$.

Fie $\rho(A)$ mulțimea rezolventă a operatorului A, iar $\rho_0(A)$ componenta conexă nemărginită a mulțimii $\rho(A)$. Pentru $\forall x^* \in X^*$, definim funcția:

$$\varphi_{x^*} : \rho(A) \to C \text{ prin } \varphi_{x^*}(\lambda) = x^* R(\lambda, A) b$$

Teorema 3.1 Următoarele afirmații sînt echivalente:

a) $(A, b) \in \Sigma_c$ pe $[0, T]$

b) $\varphi_{x^*}(\cdot)$ este nulă pe $\rho_0(A)$ dacă și numai dacă $x^* = 0$

c) Pentru orice submulțime M a lui $\rho_0(A)$ cu puncte de acumulare în $\rho_0(A)$, $\bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A)\, b = X$

d) Există o mulțime $M \subset \rho_0(A)$, $\rho_0(A) \cap M' \neq \varnothing$, pentru care $\bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A) b = X$

Demonstrație. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Să presupunem că *b)* nu are loc. Deci, există $x^* \neq 0$ astfel încît $\varphi_{x^*}(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \rho_0(A)$. Din reprezentarea $R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n$ obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} x^* A^n b = 0 \quad \forall \lambda \in \rho_0(A)$$

care este echivalentă cu $x^* A^n b = 0$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ și conform propoziției 3.1 $(A, b) \notin \Sigma_c$.

b) $\Rightarrow$ *c)*. Presupunem c) falsă. Deci, există o mulțime cu puncte de acumulare $M \subset \rho_0(A)$, pentru care $\bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A)\, b \neq X$. Să notăm $X_0 = \bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A)\, b$. Dintr-o consecință a teoremei lui Hahn-Banach, există o funcțională nenulă $x^* \in X^*$ care se anulează pe X_0 și, în particular, $x^*(R(\lambda, A)\, b) = 0$ pentru orice $\lambda \in M$. Funcția $\lambda \to x^*(R(\lambda, A)\, b)$ este olomorfă pe $\rho_0(A)$, și anulîndu-se pe o mulțime cu puncte de acumulare în $\rho_0(A)$ este identic nulă pe $\rho_0(A)$, de unde rezultă că nu are loc *b)*.

c) $\Rightarrow$ *d)*. Evident.

d) $\Rightarrow$ *a)*. Presupunem d) adevărată. Atunci, există $M \subset \rho_0(A)$, $\rho_0(A) \cap M' \neq \varnothing$ și $\bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A)\, b = X$. Fie $x^* \in X^*$ pentru care $x^* e^{At} b = 0$ oricare ar fi $t \in [0, T]$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x^*(A^n b) \cdot \frac{t}{n!} = 0$ pe $[0, T]$ și deci, $x^* A^n b = 0$. Prin urmare, $x^*\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n b\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} x^* A^n b = 0 \ \forall \lambda \in M$ De aici, $x^*\left(\bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A)\, b\right) = 0$ și conform lui *d)* $\Rightarrow x^* = 0$. Rămîne să observăm că $(x^* e^{At} b = 0 \Leftrightarrow x^* = 0)$ este echivalentă cu *a)*, conform propoziției 3.1.

Observația 3.2 Pentru cazul finit dimensional, condiția *b)* echivalentă cu controlabilitatea completă, a fost formulată de Aizerman, M. A. și Gantmaher, F. R. [1]

Observația 3.3 Condițiile *c)* și *d)* au în cazul finit dimensional formulările :

c') oricare ar fi numerele complexe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distincte și diferite de valorile proprii ale matricii A vectorii $(\lambda_j I - A)^{-1} b$ sînt liniar independenți.

d') există n numere complexe $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ astfel încît vectorii $(\lambda_j I - A)^{-1} b$ sînt liniar independenți.

Propoziția 3.2 Fie $(A, b) \in \Sigma_c$. Atunci sistemul operatorial

$$(3.1) \quad \begin{cases} YA = AY \\ Yb = 0 \end{cases}$$

admite numai soluția nulă.

Demonstrație. Fie $(A, b) \in \Sigma_c$ și să presupunem că ar exista o soluție nenulă Y_0 a sistemului (3.1). Fie $x_0 \in X$ pentru care $Y_0 x_0 \neq 0$. Deoarece $(A, b) \in \Sigma_c$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ astfel încît

$$\left\| x_0 - \int_0^T e^{-A\tau} Y_0 b u(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|Y_0\|}$$

De aici,

$$|| Y_0x_0 - \int_0^T e^{-A\tau} Y_0 bu(\tau)\, d\tau || = || Y_0x_0 || \leqslant \varepsilon$$

ε fiind arbitrar, obținem $Y_0x_0=0$, în cotradicție cu alegerea lui x_0.

Observația 3.3 Reciproca propoziției 3.2 adevărată pentru X finit dimensional [10], nu este B – stabilă (nici H – stabilă) după cum reiese din următorul exemplu ;

Exemplul 3.1 Fie $X=L^2[0, 2\pi]$, $A \in \tilde{X}$ definit prin $(Af)(z)=z\cdot f(z)$ $\forall f \in L^2[0, 2\pi]$ și vectorul $b \in L^2[0, 2\pi]$, definit prin $b(z)=z$ (funcția identică în $L^2[0, 2\pi]$. După cum este bine cunoscut [13] comutantul operatorului A (translația bilaterală în $L^2[0, 2\pi]$) coincide cu mulțimea operatorilor de înmulțire cu elemente din $L^\infty[0, 2\pi]$; adică, pentru orice $Y \in \tilde{X}$ cu proprietatea $YA=AY$ există $\varphi_Y \in L^\infty[0, 2\pi]$ astfel încît $(Yf)(z)=\varphi_Y(z)\cdot f(z)$. Atunci $(Yb)(z)=0 \Leftrightarrow \varphi_Y(z)\cdot z=0$, de unde $\varphi_Y=0$ în $L^\infty[0, 2\pi]$, deci $Y=0$.

BILBIOGRAFIE

1. Aizerman, M.A., Absoliutnaia ustoicivosti reguliruemîh sistem, Izd. Akad. Nauk, S.S.S.R., 1963.
2. Antosiewicz, H.A., Linear control systems, Arch, Rat. Mech. and Anal., v. 12, No. 4, 1963.
3. Fattrini, H.O., On complete controllability of linear systems, J. Diff. Equat., v. 3, No. 3, 1967.
4. Hautus, M.L.J., Controllability and observability conditions of linear autonomous systems, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A 72, 1969.
5. Kalman, R.E., Contributions to the theory of optimal control, Bool. Soc. Mat. Mexicana, No. 5, 1960.
6. Lee, E.B., and Marcus, L., Foundations of optimal control, Wiley, New York, 1967.
7. Lefschetz, S., Stability of nonlinear systems, Akademic Press, New York, 1965.
8. Megan, M., și Hiris, V., On the space of linear controllable systems in Hilbert space, Glasnik Mat., Tom 10 (30), 1975.
9. Megan, M. și Topuzu, P., On the density property of controllable systems, S.E.F., No. 43, 1978.
10. Popov, V.M., Hiperstabilitatea sistemelor automate, București, Edit. Akad. R.S.R,. 1966.
11. Reghis, M. și Hiris, V., Controlabilité complète des equations differentielles lineaires dans des espaces de Hilbert, Rev. Roum. Math. pures et appl. No 7 (1973)
12. Triggiani, R., Controllability and observability in Banach space with bounded operators, SIAM. J. Control, No.13 (1975)
13. Halmos, P.R., A Hilbert space problem book, Van Nostrand Comp., 1967.

ON THE CONTROLLABILITY LINEAR SYSTEMS IN BANACH SPACES

ABSTRACT

The present paper studies the notion of controllability for dynamical systems, described by linear differential equations in infinite-dimensional Banach spaces, under the basic assumption that the operator acting on state be bounded.

A study of the property of controllability can be found in [4], [5], [6], [10] for finite dimensional spaces.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 1 —1979**

TRANSFORMĂRI GENERALE ALE FAMILIILOR COMPOZABILE

DE

M. NEAGU

1. Noţiunea de compozabilitate a fost introdusă de R. Cristescu [3] în cadrul distribuţiilor pentru sisteme fizice liniare. Ulterior, I. Ciorănescu [1] generalizează noţiunea de compozabilitate pentru distribuţii cu valori în dualul unui spaţiu Banach, R. Cristescu [4] prezintă forma generală a familiilor compozabile de funcţionale liniare, iar M. Cîrnu [2] prezintă compozabilitatea cu operatori liniari.

În această lucrare se prezintă transformările generale ale familiior compozabile de operatori liniari, transformări care includ transformările particulare ale familiilor compozabile, date pînă acum.

În contextul dezvoltărilor ulterioare, în notaţiile $X \subset U^A$, $Y \subset V^B$, $Z \subset W^C$, $-S \subset T^D$ se vor înţelege U, V, W, T spaţii vectoriale topologice peste acelaşi corp; A, B, C, D mulţimi arbitrare, iar X, Y, Z, $-S$ subspaţii vectoriale topologice, înzestrate în general cu topologii mai fine decît cele induse.

Fie o familie $\bar{u} = \{u_s\}_{s \in B}$ de operatori liniari şi continui de la X la V, $u_s \in L(X; V)$ oricare ar fi $s \in B$, fixat. Există izomorfismul

$$L(X; V^B) \sim L(X; V^B)$$

prin ataşarea la fiecare familie $\bar{u} \in L(X; V)^B$, a cîte unui operator $U_{\bar{u}} \in L(X; V^B)$ prin corespondenţa

$$U_{\bar{u}}(\varphi) = \psi,\ \varphi \in X,\ \psi \in V^B \Leftrightarrow u_s(\varphi) = \psi(s),\ s \in B \tag{1}$$

Definiţia 1. Familia de operatori $\bar{u} \in L(X; V)^B$ se numeşte $(X; Y)$ compozabilă dacă $U_{\bar{u}} \in L(X; Y)$.

Mulţimea familiilor $(X; Y)$ compozabiles e va nota cu $FC(X; Y)$ şi există un izomorfism între $FC(X; Y)$ şi $L(X; Y)$ (mulţimea operatorilor liniari şi continui de la X la Y) dat de relaţia (1).

Definiţia 2. Dacă $\bar{u} \in FC(X; Y)$, unde $\bar{u} = \{u_s(r)\}_{s \in B, r \in A}$ iar $\bar{v} \in FC(Y; Z)$, unde $\bar{v} = \{v_t(s)\}_{t \in C, s \in B}$, atunci familia $\bar{w} = \bar{u} \bigcirc \bar{v} = \{w_t(r)\}_{t \in C, r \in A}$ definită de relaţia

$$(w_t, \varphi) = (w_t(r), \varphi(r)) = (v_t(s), (u_s(r), \varphi(r))) \tag{2}$$

oricare ar fi $\varphi \in X$, se numeşte produsul de compoziţie al familiilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$.

Se observă că $\bar{w} \in FC(X; Z)$, iar

$$U_{\bar{w}} = U_{\bar{u} \circ \bar{v}} = U_{\bar{v}} U_{\bar{u}} \tag{3}$$

Aceste noţiuni sînt cunoscute. Se vor prezenta în continuare rezultate privind transformările generale ale familiilor compozabile.

2. **Definiția 3.** Fie $F \in L(Y; Z)$. Dacă $\bar{u} \in FC(X; Y)$, unde $\bar{u} = \{u_s(r)\}_{s \in B}$, $r \in A$ se numește transformarea F^S a familiei $\bar{u}$, familia

$$\bar{v} = F^S(\bar{u}) = F_s^S \{u_s(r)\}(t) = \{v_t(r)\}_{t \in C},\ r \in A$$

definită de relația

$$(v_t(r), \varphi(r)) = F(u_s(r), \varphi(r))(t);\ \forall \varphi \in X \tag{4}$$

Conform definiției se observă că $\bar{v} \in FC(X; Z)$, deoarece (4) se mai scrie

$$U_{\bar{v}}(\varphi) = FU_{\bar{u}}(\varphi);\ \forall \varphi \in X$$

adică

$$U_{F^S(\bar{u})} = FU_{\bar{u}} \tag{5}$$

Propoziția 1. Fie $F \in L(Z; -S)$. Dacă $\bar{u} \in FC(X; Y)$ și dacă $\bar{v} \in FC(Y; Z)$, atunci

$$F^S(\bar{u} \circ \bar{v}) = \bar{u} \circ F^S(\bar{v}) \tag{6}$$

În adevăr, după (3) și (5) rezultă că

$$U_{F^S(\bar{u} \circ \bar{v})} = FU_{\bar{u} \circ \bar{v}} = FU_{\bar{v}} U_{\bar{u}} = U_{F^S(\bar{v})} U_{\bar{u}} = U_{\bar{u} \circ F^S(\bar{v})}$$

și de aici rezultă relația (6), unde

$$F^S(\bar{u} \circ \bar{v}) \in FC(x; -S)$$

Definiția 4. Familia $\bar{\delta}_X = \{\delta_r(\rho)\}_{r \in A, \rho \in A}$, pentru care

$$(\delta_r(\rho), \varphi(\rho)) = \varphi(r);\ \forall \varphi \in X \tag{7}$$

se numește familie identică în X (în sensul compozabilității).

Se observă că relația (7) definește o aplicație liniară de la X la X și are un rol deosebit de important în compozabilitate dacă $\bar{\delta}_X \in FC(X; X)$.

În adevăr, dacă $\bar{\delta}_X \in FC(X; X)$, atunci oricare ar fi $\bar{u} \in FC(X; Y)$, are loc relația

$$\bar{\delta}_x \circ \bar{u} = \bar{u} \tag{8}$$

În mod analog, dacă $\bar{\delta}_Y \in FC(Y; Y)$, atunci oricare ar fi $\bar{u} \in FC(X; Y)$, are loc relația

$$\bar{u} \circ \bar{\delta}_y = \bar{u} \tag{9}$$

Consecința 1. Fie $F \in L(Y; Z)$. Dacă $\bar{u} \in FC(X; Y)$ și dacă $\bar{\delta}_Y \in FC(Y; Y)$, atunci au loc relațiile

$$(F_s^S \{\delta_s(\sigma)\}(t), \varphi(\sigma)) = F(\varphi)(t);\ \forall \varphi \in Y;\ s, \sigma \in B;\ t \in C$$

și

$$F^S(\bar{u}) = \bar{u} \circ F^S(\bar{\delta}_Y) \tag{10}$$

Definiția 5. Fie $F \in L(Y; Z)$ care admite inversa $F^{-1} \in L(Z; Y)$. Dacă $\bar{v} \in FC(X; Z)$, unde $\bar{v} = \{v_t(r)\}_{t \in C, r \in A}$, se numește transformare F^{-S} a familiei $\bar{v}$, familia

$$\bar{u} = F^{-S}(\bar{v}) = F_t^{-S} \{v_t(r)\}(s) = \{u_s(r)\}_{s \in B, r \in A}$$

definită de relația

$$(u_s(r), \varphi(r)) = F^{-1}(v_t(r), \varphi(r))(s) \tag{11}$$

Se observă că $\bar{u} \in FC(X; Y)$, iar

$$U_{F^{-S}(\bar{v})} = F^{-1} U_{\bar{v}} \tag{12}$$

Consecința 2. În condițiile din definiția 5, transformarea F^{-S} este inversa transformării F^S, în sensul că au loc relațiile

$$F^{-S} F^S(\bar{u}) = \bar{u}\ ;\ \forall \bar{u} \in FC(X; Y)$$

și

$$F^S F^{-S}(\bar{v}) = \bar{v}\ ;\ \forall \bar{v} \in FC(X; Z)$$

Remarca 1. În conformitate cu definițiile 3 și 5 rezultă că transformarea F^{-S} este de fapt o transformare F^S corespunzătoare transformării $F^{-1} \in L(Z; Y)$. Astfel, dacă se va conveni să se spună că transformarea

$$F^S : FC(X; Y) \to FC(X; Z)$$

definită de relația (4) este transformarea atașată transformării $F \in L(Y; Z)$, atunci transformarea

$$F^{-S} : FC(X; Z) \to FC(X; Y)$$

definită de relația (11) este transformarea atașată transformării $F^{-1} \in L(Z; Y)$.

Remarca 2. Se cunoaște, în particular, în cadrul transformării Fourier a funcțiilor distribuționale compozabile [2] cînd $X = D(\mathbf{R}) \subset \mathbf{C}^{\mathbf{R}}$; $Y = Z \subset \mathbf{C}^{\mathbf{R}}$, transformarea

$$F_s^S \{\delta_s(r)\}(t) = \{e^{itr}\}_t \tag{13}$$

atașată transformării Fourier F.

În relația (13), corespunzătoare cazului particular menționat,

$$\{\delta_s(r)\} = \{\delta(r-s)\} = \overline{\delta}_{D(\mathbf{R})}$$

unde $D(\mathbf{R})$ este spațiul funcțiilor indefinit derivabile cu suport compact pe $\mathbf{R}$, înzestrat cu topologa lui L. Schwartz [5].

3. **Definiția 6.** Fie $F \in L(X; Z)$. Dacă $\bar{v} \in FC(Z; Y)$, unde $\bar{v} = \{v_s(t)\}_{s \in B}$, $t \in C$ se numește transformarea F^D a familiei $\bar{v}$, familia

$$\bar{u} = F^D(\bar{v}) = F_t^D \{v_s(t)\}(r) = \{u_s(r)\}_{s \in B,\, r \in A}$$

definită de relația

$$(u_s(r).\ \varphi(r)) = (v_s(t),\ F(\varphi)(t))\ ;\ \forall \varphi \in X \tag{14}$$

Relația (14) este echivalentă cu relația

$$U_{F^D(\bar{v})}(\varphi) = U_{\bar{v}}(F(\varphi))\ ;\ \forall \varphi \in X \tag{15}$$

sau cu relația

$$U_{F^D(\bar{v})} = U_{\bar{v}} F \tag{16}$$

ceea ce arată că $\bar{u} = F^D(\bar{v}) \in FC(X; Y)$

Propoziția 2. Fie $F \in L(-S; X)$. Dacă $\bar{u} \in FC(X; Y)$ și dacă $\bar{v} \in FC(Y; Z)$, atunci are loc relația

$$F^D(\bar{u} \circ \bar{v}) = F^D(\bar{u}) \circ \bar{v} \tag{17}$$

și unde

$$F^S(\bar{u} \circ \bar{v}) \in FC(-S; Z)$$

Demonstrația este analoagă cu cea din cadrul propoziției 1.

Consecința 3. Fie $F \in L(X; Z)$. Dacă $\bar{v} \in FC(Z; Y)$ și dacă $\bar{\delta}_Z \in FC(Z; Z)$, atunci au loc relațiile

$$(F_\tau^D \{\delta_t(\tau)\}(r), \varphi(r)) = F(\varphi)(t); \quad \forall \varphi \in X; \; r \in A; \; t, \tau \in C$$

și

$$F^D(\bar{v}) = F^D(\bar{\delta}_Z) \bigcirc \bar{v} \tag{18}$$

Definiția 7. Fie $F \in L(X; Z)$ care admite inversa $F^{-1} \in L(Z; X)$. Dacă $\bar{u} \in FC(X; Y)$, unde $\bar{u} = \{u_s(r)\}_{s \in B, r \in A}$, se numește transformarea F^{-D} a familiei $\bar{u}$, familia

$$\bar{v} = F^{-D}(\bar{u}) = F_r^{-D} \{u_s(r)\}(t) = \{v_s(t)\}_{s \in B, t \in C}$$

definită de relația

$$(v_s(t), \psi(t)) = (u_s(r), F^{-1}(\psi)(r)); \quad \forall \psi \in Z \tag{19}$$

Se observă că $\bar{v} \in FC(X; Z)$, iar

$$U_{F^{-D}(\bar{v})} = U_{\bar{v}} F^{-1} \tag{20}$$

Consecința 4. În condițiile din definiția 7, transformarea F^{-D} este inversa transformării F^D, în sensul că au loc relațiile

$$F^{-D}F^D(\bar{v}) = \bar{v}; \quad \forall \bar{v} \in FC(Z; Y)$$

$$F^D F^{-D}(\bar{u}) = \bar{u}; \quad \forall \bar{u} \in FC(X; Y)$$

4. Fie $F \in L(X; Y)$, care admite inversa $F^{-1} \in L(Y; X)$.

Propoziția 3. Dacă $\bar{u} \in FC(X; X)$, atunci

$$F^S F^{-D}(\bar{u}) = F^{-D} F^S(\bar{u}) \tag{21}$$

În adevăr,

$$U_{F^S F^{-D}(\bar{u})} = F U_{F^{-D}(\bar{u})} = F U_{\bar{u}} F^{-1} = U_{F^S(\bar{u})} F^{-1} = U_{F^{-D} F^S(\bar{u})}$$

de unde rezultă relația (21), iar

$$F^S F^{-D}(\bar{u}) = F^{-D} F^S(\bar{u}) \in FC(Y; Y)$$

Definiția 8. Se numește transformare **F**, transformarea

$$\mathbf{F} = F^S F^{-D} = F^{-D} F^S : FC(X; X) \to FC(Y; Y) \tag{22}$$

Conform acestei definiții, rezultă că oricare ar fi $\bar{u} \in FC(X; X)$,

$$U_{\mathbf{F}(\bar{u})} = F U_{\bar{u}} F^{-1} \tag{23}$$

adică

$$U_{\mathbf{F}(\bar{u})}(F(\varphi)) = F U_{\bar{u}}(\varphi); \quad \forall \varphi \in X \tag{24}$$

Astfel, oricare ar fi $\bar{u} \in FC(X; X)$, unde $\bar{u} = \{u_r(\rho)\}_{r \in A, \rho \in A}$ rezultă că familia

$$\bar{v} = \mathbf{F}(\bar{u}) = \{v_s(\sigma)\}_{s \in B, \tau \in B}$$

este definită de relația

$$(v_s(\sigma), F(\varphi)(\sigma)) = F(u_r(\rho), \varphi(\rho))(s); \quad \forall \varphi \in X \tag{25}$$

Se mai observă că transformarea $\mathbf{F}$ este atașată în același timp transformărilor $F \in L(X; Y)$ și $F^{-1} \in L(Y; X)$.

Propoziția 4. Dacă $\bar{\delta}_X \in FC(X; X)$, atunci oricare ar fi $\bar{u} \in FC(X; X)$, are loc relația

$$\mathbf{F}(\bar{u}) = F^{-D}(\bar{\delta}_X) \circ \bar{u} \circ F^{S}(\bar{\delta}_X) \tag{26}$$

Propoziția 5. Dacă $\bar{u}$, $\bar{v} \in FC(X; X)$, atunci are loc relația

$$\mathbf{F}(\bar{u} \circ \bar{v}) = \mathbf{F}(\bar{u}) \circ \mathbf{F}(\bar{v}) \tag{27}$$

În adevăr,

$$U_{\mathbf{F}(\bar{u}\circ\bar{v})} = FU_{(\bar{u}\circ\bar{v})}F^{-1} = FU_{\bar{v}}U_{\bar{u}}F^{-1} = FU_{\bar{v}}F^{-1}FU_{\bar{u}}F^{-1} = U_{\mathbf{F}(\bar{v})}\,U_{\mathbf{F}(\bar{u})} =$$

$$= U_{\mathbf{F}(\bar{u})\circ\mathbf{F}(\bar{v})}$$

Propoziția 6. Dacă $\bar{\delta}_X \in FC(X; X)$ și dacă $F \in L(X; Y)$ care admite inversa $F^{-1} \in L(Y; X)$, atunci $\bar{\delta}_Y \in FC(Y; Y)$ și are loc relația

$$\bar{\delta}_Y = F^{S}F^{-D}(\bar{\delta}_X) = \mathbf{F}(\bar{\delta}_X) \tag{28}$$

În adevăr, fie $\bar{\delta}_X = \{\delta_r(\rho)\}_{r\in A, \rho\in B}$ și fie

$$\mathbf{F}\{\delta_r(\rho)\} = \{v_s(\sigma)\}_{s\in B, \tau\in B}.$$

Datorită proprietăților transformării $F \in L(X; Y)$, rezultă că oricare ar fi $\psi \in Y$, există $\varphi \in X$, unic determinat, astfel încît $F(\varphi) = \psi$.

Astfel, oricare ar fi $\psi \in Y$,

$$(v_s(\sigma), \psi(\sigma)) = (v_s(\sigma), F(\varphi)(\sigma)) = F(\delta_r(\rho), \varphi(\rho))(s) = F(\varphi(\rho))(s) = \psi(s)$$

de unde

$$\mathbf{F}(\bar{\delta}_X) = \bar{\delta}_Y \in FC(Y; Y)$$

Propoziția 7. Dacă $\bar{u}$, $\bar{v} \in FC(X; X)$, atunci au loc relațiile

$$\mathbf{F}(\bar{u} \circ \bar{v}) = \mathbf{F}(\bar{u}) \circ \mathbf{F}(\bar{v}) = F^{-D}(\bar{u}) \circ F^{S}(\bar{v}) \tag{29}$$

$$F^{S}(\bar{u} \circ \bar{v}) = F^{S}(\bar{u}) \circ \mathbf{F}(\bar{v}) \tag{30}$$

$$F^{-D}(\bar{u} \circ \bar{v}) = \mathbf{F}(\bar{u}) \circ F^{-D}(\bar{v}) \tag{31}$$

$$F^{S}(\bar{u}) \circ F^{-D}(v) = \bar{u} \circ \bar{v} \tag{32}$$

Definiția 9. Se numește transformare $\mathbf{F}^{-1}$, transformarea

$$\mathbf{F}^{-1} = F^{-S}F^{D} = F^{D}F^{-S} : FC(Y; Y) \to FC(X; X) \tag{33}$$

atașată transformărilor $F \in L(X; Y)$ și $F^{-1} \in L(Y; X)$.

Conform acestei definiții, rezultă că oricare ar fi $\bar{v} \in FC(Y; Y)$,

$$U_{\mathbf{F}^{-1}(\bar{v})} = F^{-1}U_{\bar{v}}F \tag{34}$$

adică

$$U_{\mathbf{F}^{-1}(\bar{v})}(F^{-1}(\psi)) = F^{-1}U_{\bar{v}}(\psi);\ \forall \psi \in Y \tag{35}$$

Astfel, oricare ar fi $\bar{v} \in FC(Y; Y)$, unde $\bar{v} = \{v_s(\sigma)\}_{s\in B, \tau\in B}$ rezultă că familia

$$\bar{u} = \mathbf{F}^{-1}(\bar{v}) = \{u_r(\rho)\}_{s\in B, \tau\in B}$$

este definită de relația

$$(u_r(\rho), F^{-1}(\psi)(\rho)) = F^{-1}(v_s(\sigma), \psi(\sigma))(r); \quad \psi \in Y \tag{36}$$

Consecința 5. În condițiile menționate în definițiile 8 și 9, rezultă că transformarea $\mathbf{F}^{-1}$ este inversa transformării **F**, în sensul că au loc relațiile

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}(\bar{u}) = \bar{u}; \quad \forall \bar{u} \in FC(X; X) \tag{37}$$

și

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}(\bar{v}) = \bar{v}; \quad \forall \bar{v} \in FC(Y; Y) \tag{38}$$

În concluzie, s-a prezentat în această lucrare pe o formă generală transformarea **F**. Această transformare va fi fundamentală în prezentarea unor rezultate în lucrări care vor fi dezvoltate ulterior.

Datorită formei de prezentare prin intermediul transformărilor F^S și F^{-D} s-au putut pune în evidență o serie de proprietăți generale ale acestei transformări.

Se cunosc în particular, în cadrul funcțiilor distribuționale compozabile astfel de transformări corespunzătoare transformărilor Fourier și Laplace a funcțiilor distribuționale.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Ciorănescu — Teoreme de reprezentare a unor distribuții vectoriale, St. cerc. mat. București, 1972, 24, 5, pp. 687—728.
2. M. Cîrnu — Sur la transformation des Fourier des fonctions distributionnelles composables, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., București, 1968, 13, 1, pp. 25—34.
3. R. Cristescu — Familles composables des distributions et systèmes physiques lineaires, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. București, 1964, 9, pp. 703—711.
4. R. Cristescu — Familii compozabile de funcționale liniare, Anal. Univ. București, 1966, XV, 2, pp. 9—14.
5. L. Schwartz — Theorie des distributions. Hermann, Paris, 1973.

TRANSFORMATIONS GÉNÉRALES DES FAMILLES COMPOSABLES

RESUMÉ

En utilisant la notion de composabilité introduite par R. Cristescu pour les distributions et généralisée par M. Cîrnu pour les fonctionnelles linéaires, dans le travail on donne les transformations générales des familles composables.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) Fascicola 1 —1979

DOUĂ METODE DE OPTIMIZARE UNIDIMENSIONALE DE EXPLORARE CU APLICAŢII ÎN CHIMIE ŞI PROGRAMAREA LOR LA CALCULATORUL FELIX C-256*

DE

F. KLEPP ; M. MORARU ; E. SCHULLER

Optimizarea procedeelor chimice are drept obiectiv determinarea relaţiilor, care constituie modelul matematic al procesului şi stabilirea acelor valori ale variabilelor modelului, care definesc optimul acestuia. Un rol hotărîtor în alegerea modelelor folosite pentru determinarea optimului îl are structura funcţiei scop şi a relaţiilor de restricţie care se impun variabilelor în descrierea procesului. Autorii tratează în lucrare două metode de optimizare unidimensionale de explorare, construind şi programul de lucru pentru utilizarea acestor metode cu ajutorul calculatorului FELIX C-256.

Metodele de optimizare unidimensionale sînt acele metode care se folosesc pentru optimizarea unor funcţii scop de forma $y=F(x)$, ce depind de o singură variabilă. În probele practice ale chimiei de cele mai multe ori nu se cunoaşte nici graficul, nici expresia analitică a funcţiei $y=F(x)$, dar este posibilă determinarea valorilor ei pe cale experimentală în toate punctele intervalului de investigaţie $[a, b]$. Se va considera că funcţia scop este unimodală în intervalul de investigaţie, ceea ce nu restrînge generalitatea. Pentru simplificarea calculelor, funcţia $F(x)$ fiind definită pe intervalul $[a, b]$, se normează intervalul de investigaţie, devenind $[0, 1]$.

Cele două metode expuse în lucrare sînt metode de explorare, ele folosesc doar valorile funcţiei scop $F(x)$ în determinarea optimului, nu şi valorile derivatei sale $F'(x)$, cum se procedează în cazul metodelor de gradient.

Precizia şi totodată eficacitatea metodelor de optimizare pentru funcţii unimodale se estimează cu ajutorul intervalului de nesiguranţă, care este o parte a intervalului de definiţie $[0, 1]$ ce conţine optimul.

Cele două metode expuse sînt metode secvenţiale, ele valorifică în cadrul unei determinări informaţiile din determinările precedente. În cadrul metodelor de explorare secvenţială una din cele mai eficace este metoda Fibonacci [1]. Metoda Fibonacci cere fixarea în prealabil a numărului n de puncte x_i, ale căror poziţii succesive se determină în cadrul metodei cu ajutorul numerelor din şirul Fibonacci. Numerele lui Fibonacci se generează cu ajutorul formulei:

$$Fi(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

* Comunicată la Sesiunea Societăţii de Ştiinţe Matematice din R.S. România consacrată Centenarului independenţei. Bucureşti 3—4 septembrie 1977.

De la capetele intervalului [0, 1] se scade distanța $d_1 = \frac{Fi(n-1)}{Fi(n)} \cdot 1$, obținînd astfel punctele $x_1^{(1)}$ și $x_2^{(1)}$ în care urmează să se determine experimental valoarea funcției scop $F(x)$.

Cunoscîndu-se valorile $F(x_1^{(1)})$ și $F(x_2^{(1)})$ ele se pot compara constatîndu-se de exemplu că : $F(x_1^{(1)}) > F(x_2^{(1)})$. În această ipoteză, dacă se caută un maxim, atunci căutarea se continuă numai în intervalul $[0, x_2^{(1)}]$, el ne putîndu-se găsi în afara acestui interval. Analog, dacă se caută un minim, căutarea se continuă numai în intervalul $[x_1^{(1)}, 1]$, el ne putîndu-se găsi în afara acestui interval.

În intervalul păstrat se scade de la capetele intervalului distanța :

$$d_2 = \frac{Fi(n-2)}{Fi(n-1)} d_1 = \frac{Fi(n-2)}{Fi(n-1)} \cdot \frac{Fi(n-1)}{Fi(n)} = \frac{Fi(n-2)}{Fi(n)}$$

obținîndu-se astfel punctele $x_1^{(2)}$ și $x_2^{(2)}$ în care urmează să se determine experimental valoarea funcției scop $F(x)$. În urma comparării valorilor obținute pentru $F(x_1^{(2)})$ și $F(x_2^{(2)})$ se elimină din nou o parte a intervalului de investigație, obținîndu-se un alt interval de nesiguranță.

Repetînd raționamentul la pasul k se obține distanța :

$$d_k = \frac{Fi(n-k)}{Fi(n)}$$

care scăzîndu-se din capetele intervalului anterior rezultă punctele $x^{(k)}$ și $x^{(k)}$. În acest mod se micșorează treptat intervalul în care se găsește punctul extrem, obținîndu-se aproximări din ce în ce mai bune. Teoretic pentru pasul ultim $(n-1)$, cele două puncte $x_1^{(n-1)}$ și $x_2^{(n-2)}$ obținute se suprapun. Practic aceste două puncte vor diferi printr-o valoare, care depinde de precizia calculelor și a determinărilor, și distanța corespunzătoare este :

$$d_{n-1} = \frac{L}{Fi(n)} + \varepsilon$$

Mărimea intervalului de nesiguranță în explorarea Fibonacci va fi deci după n pași : $L_n^* = \frac{1}{Fi(n)} + \varepsilon$, și se poate stabili numărul de pași necesari pentru a asigura precizia dorită, folosindu-se șirul numerelor lui Fibonacci.

Pentru o utilizare eficientă a metodei, ea se programează la calculatorul FELIX C-256, schema logică pentru algoritmul de calcul găsindu-se în fig. 1.

O altă metodă de explorare unidimensională eficace este metoda de interpolare Lagrage [2]. Această metodă apelează, în algoritmul de determinare a optimului, la o funcție de înlocuire $G(x)$. Determinîndu-se valorile funcției scop $F(x)$ pentru $n+1$ valori ale argumentului din intervalul de investigație $[a, b]$, se obțin punctele $(x_0, F(x_0)) : (x_1, F(x_1)), (x_2, F(x_2)), \ldots (x_n, F(x_n))$ numite puncte de sprijin. Se construiește apoi o funcție $G(x)$ care trece prin punctele de sprijin, deci pentru care $G(x_0) = F(x_0)$, $G(x_1) = F(x_1) \ldots F(x_n) = G(x_n)$ și care are expresia analitică cunoscută. Forma funcției de înlocuire se alege astfel încît valoarea ei extremă să se calculeze ușor. Din această cauză de obicei se alege $G(x)$ ca fiind un polinom de gradul n, numit polinomul de interpolare Lagrange. Se determină punctul $\tilde{x} \in [a, b]$ în care $G(x)$ are valoarea extremă $G(\tilde{x})$ și se consideră că valoarea funcției scop în acest punct : $F(\tilde{x})$ este prima aproximație pentru valoare extremă a funcției scop. Valoarea obținută se folosește în continuare pentru reducerea intervalului de investigație.

Procedeul se repetă iterativ pînă cînd intervalul de investigație obținut corespunde preciziei dorite. În practica chimică se folosește de obicei o interpolare pătratică, utilizîndu-se ca funcție $G(x)$ un polinom $P(x)$ de gradul 2, care trece prin 3 puncte de sprijin.

Acest polinom este de forma :

$$P(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}F(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}F(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}F(x_2)$$

Prin anularea derivatei se găsește punctul x de extrem al lui $P(x)$:

$$\tilde{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_1^2-x_2^2)F(x_0)-(x_0^2-x_2^2)F(x_1)+(x_0^2-x_1^2)F(x_2)}{(x_1-x_2)F(x_0)-(x_0-x_2)F(x_1)+(x_0-x_1)F(x_2)}$$

Punctul $\tilde{x}$ în care $P(x)$ ia valoarea extremă se poate situa într-unul din cele două domenii $[x_0, x_1]$ sau $[x_1, x_2]$. Se calculează valoarea funcției scop în acest punct : $F(\tilde{x})$ și se alege domeniul de lucru pentru continuarea explorării cu ajutorul tabelului de mai jos :

Natura problemei	Poziția lui $\tilde{x}$	Relația între valorile funcției	Domeniul în care se continuă investigația	Abscisele noilor puncte de sprijin		
				x_0	x_1	x_2
Maxim	$\tilde{x}<x_1$	$F(\tilde{x})<F(x_1)$	$[\tilde{x}, x_2]$	$\tilde{x}$	x_1	x_2
		$F(\tilde{x})>F(x_1)$	$[x_0, x_2]$	x_0	$\tilde{x}$	x_2
	$\tilde{x}>x_1$	$F(\tilde{x})<F(x_1)$	$[\tilde{x}_0, x]$	x_0	x_1	$\tilde{x}$
		$F(\tilde{x})>F(x_1)$	$[x_1, x_2]$	x_1	$\tilde{x}$	x_2
Minim	$\tilde{x}<x_1$	$F(\tilde{x})<F(x_1)$	$[x_0, x_1]$	x_0	$\tilde{x}$	x_1
		$F(\tilde{x})>F(x_1)$	$[\tilde{x}, x_2]$	$\tilde{x}$	x_1	x_2
	$\tilde{x}>x_1$	$F(\tilde{x})<F(x_1)$	$[x_1, x_2]$	x_1	$\tilde{x}$	x_2
		$F(\tilde{x})>F(x_1)$	$[\tilde{x}_1, x]$	x_0	x_1	$\tilde{x}$

Este avantajoasă menținerea valorii $\tilde{x}$ ca abscisă a noului punct de sprijin, deoarece în aceste puncte valoarea funcției scop este deja calculată.

Și această metodă se programează la calculatorul FELIX C-256, schema logică pentru algoritmul de calcul găsindu-se în figura nr. 2.

În continuare se folosesc ambele metode pentru determinarea vitezei optime și a temperaturii optime de reacție în cazul conversiei oxidului de carbon cu vapori de apă în gazele pentru sinteza amoniacului [3].

Relația de calcul este :

$$V=k\,\frac{P_{CO}p_{H_2O}-K_{p_4}^{-1}p_{H_2}p_{CO_2}}{A\,p_{H_2O}+p_{CO_2}}$$

unde : p_{CO}, p_{H_2O} și p_{CO_2} sînt presiunile parțiale ale componenților din amestecul vapori-gaz.

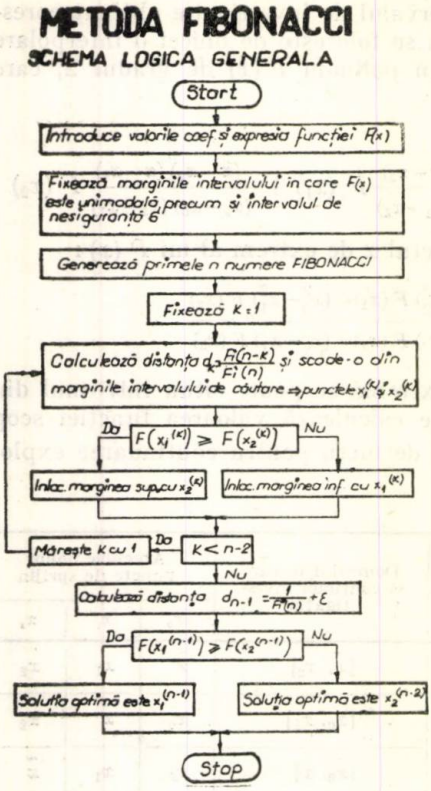


Fig. 1.

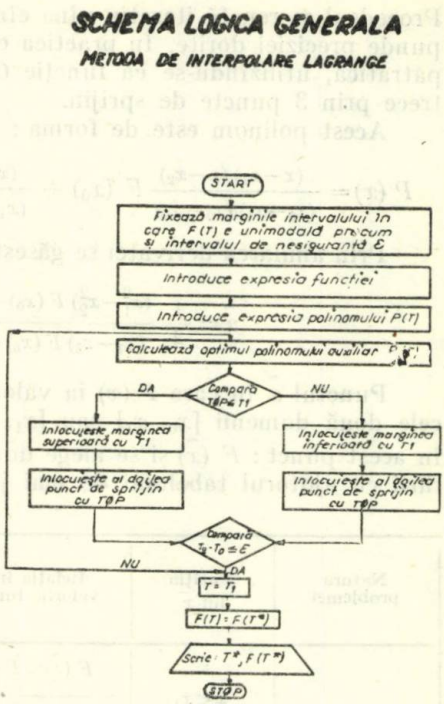


Fig. 2.

Pentru catalizatorul $Fe-Cr$ se obțin în intervalul $350°-500°$:

$$\lg k = -\frac{34\,000}{4{,}57\,T} + 10{,}2\,;\quad \lg A = -\frac{8\,800}{4{,}57\,T} + 2{,}32 \text{ și}$$

$$\lg K_p = \frac{2217{,}5}{T} + 0{,}2971 \lg T + 0{,}3525 \cdot 10^{-3} T - 0{,}0508 \cdot 10^{-6} T^2 - 3{,}26$$

Calculîndu-se presiunile parțiale ale componenților din compoziția volumetrică a amestecului gazos supus conversiei se obține funcția obiectiv :

$$v = \operatorname{colg}\left(-\frac{3\,400}{4{,}57\,T} + 10{,}2\right) \frac{p_{CO} p_{H_2O}}{\operatorname{colg}\left(-\frac{8\,800}{4{,}51\,T} + 2{,}32\right) p_{H_2O} + p_{CO_2}} \cdot \frac{p_{H_2} p_{CO_2}}{2\,217{,}5\,T^{-1} + 0{,}2\,971 \lg T + 0{,}3\,525 \cdot 10^{-3} T - 0{,}0508 \cdot 10^{-6} T^2 - 3{,}26}$$

unde :

$p_{H_2O} = 0{,}21$ ata ; $p_{CO_2} = 0{,}074$ ata ; $p_{CO} = 0{,}09$ ata ; $p_{H_2} = 0{,}566$ ata.

Mai întîi se rezolvă problema cu ajutorul metodei lui Fibonacci Programarea la calculatorul FELIX C-256 se face folosindu-se schema logică din fig. nr. 1 și se obține temperatura optimă de $T = 391{,}39$ °C.

Pentru folosirea metodei de interpolare Lagrange se folosește schema logică din fig. nr. 2 obținîndu-se temperatura optimă de $T = 390{,}981$°C.

BIBLIOGRAFIE

1. U. Hoffmann, H. Hoffmann: Einführung in die Optimierung, Verlag Chemie, Weinheim, 1971, p. 65—78.
2. W. S. Dorn, D. D. MC. Cracken: Metode numerice cu programare in FORTRAN IV Ed. Tehnică, Buc., 1976, p. 311—317.
3. A. Iovi: Curs de tehnologia amoniacului, Litografia I.P.T., 1972, p. 43—49.

ZWEI EINDIMENSIONELLE SUCHOPTIMIERUNGSVERFAHREN MIT ANWENDUNG IN DER CHEMIE UND IHRE PROGRAMMIERUNG AN FELIX C-256 COMPUTER

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befasst sich mit der Beschreibung und Programmierung am FELIX C-256 Computer einiger Optimierungsmethoden, die Anwendung in der Chemieindustrie finden, für den Fall das der analytische Ausdruck der zu optimisierenden Funktion $F(x)$ nicht bekannt ist, und die Bestimmung der x_i Punkte, in denen die Werte der Funktion berechnet werden, im Rahmen der Methode bestimmt werden müssen.

Darauf werden die Verfasser beide Methoden zwecks Bestimmung der optimalen Reaktionsgeschwindigkeit und der optimalen Reaktionstemperatur im Falle der Umsetzung des Kohlenoxyds mit Wasserdampf.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia "Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 1 —1979**

STRUCTURI DIFERENŢIABILE PE SPAŢII METRICE CONVEXE (I)

DE

DORINA RENDI şi BELA RENDI

I. CONSTRUIREA MODELULUI LOCAL.

Studiul geometric al spaţiilor metrice a fost dezvoltat de G. Birkhoff [1], H. Busemann [2], [3], L. Blumethal [4], B. Pitcher şi M. Smillei [5].

Principalele definiţii şi rezultate ce vom utiliza în prezenta lucrare vor fi date mai jos.

Definiţia 1. Un spaţiu metric local compact (M, ρ) se numeşte convex în sensul lui Menger dacă :

$$\forall x, y \in M, \quad \exists z \in M$$

astfel încît $\rho(x, z)+\rho(z, y)=\rho(x, y)$

În acest caz x, y, z formează un triplet liniar şi se foloseşte notaţia (x, z, y).

Fie $B(x, y)=\{z/z \in M, (x, z, y)\}$

Definiţia 2. Submulţimea $S(x, y) \subset B(x, y)$ se numeşte segment metric cu extremităţile x şi y dacă ea este izometrică cu segmentul $[0, a] \subset R$ unde $a=\rho(x, y)$

Se observă că dacă M este spaţiu metric complet şi convex în sensul lui Menger atunci pentru orice 2 puncte există segment metric dar nu este asigurată unicitatea lui.

Dacă M are proprietatea că intersecţia a 2 mulţimi închise şi convexe este tot o mulţime convexă, atunci segmentul metric este unic determinat.

Definiţia 1'. Un spaţiu metric local compact M verifică proprietatea de exterior convexitate dacă $\forall x, y \in M$, $\exists z \in M$ astfel încît (x, y, z)

Definiţia 2'. Submulţimea

$$L(x, y) \subset \overleftrightarrow{B}(x, y)=\{z \mid z \in M, (x, z, y) \text{ sau } (z, x, y) \text{ sau } (x, y, z)\}$$

dacă este izometrică cu axa reală **R**, se numeşte linie metrică.

Spunem că M verifică proprietatea celor două triplete dacă oricare două din următoarele afirmaţii :

$$(x, y, z), (x, y, u), (x, z, u), (y, z, u)$$

implică celelalte două.

Într-un spaţiu metric M convex, exterior convex şi cu proprietatea celor două triplete pentru orice $x, y \in M$, linia metrică $L(x, y)$ este unică.

Un spaţiu metric în care unicitatea segmentului metric este asigurată doar local, adică : $\forall x_0 \in M$, M — convex, exterior convex şi complet, $\exists \varepsilon > 0$

astfel încît $S(x, y)$ să fie unic determinat pentru orice $x, y \in V(x_0, 2\varepsilon) = \{y \mid y \in M, \rho(x_0, y) < 2\varepsilon\}$ se numeşte spaţiu metric cu vecinătăţi standard [2].

Von nota

$$\overrightarrow{S(x, y)} = \{z \mid z \in V(x_0, 2\varepsilon), (x, y, z)\} \cup S(x, y)$$

$$\overleftarrow{S(x, y)} = \{z \mid z \in V(x_0, 2\varepsilon), (z, x, y)\} \cup S(x, y)$$

$$\overrightarrow{\overleftarrow{S(x, y)}} = \overrightarrow{S(x, y)} \cup \overleftarrow{S(x, y)}$$

Definiţia 3. ([2]) Spaţiul metric M cu vecinătăţi standard verifică condiţia Δ_{x_0} dacă oricare ar fi şirurile $\{x_n\}_{n \in N}$, $\{y_n\}_{n \in N}$ $\{z_n\}_{n \in N}$ convergente la x_0, din

1) $\overrightarrow{S(x_n, y_n)}$ şi $\overrightarrow{S(x_n, z_n)}$ converg la limite diferite

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\rho(x_n, y_n)}{\rho(x_n, z_n)}$ există (posibil şi infinită) rezultă

1) $\overrightarrow{S(x_n, z_n)}$ convergent

2) $\lim\limits_{n \to \infty} R(x_n, y_n, z_n) = 1$ dacă şi numai dacă

$$\lim_{n \to \infty} \overrightarrow{S(x_n, z_n)} = \lim_{n \to \infty} \overrightarrow{S(y_n, z_n)} \text{ sau } \lim_{n \to \infty} \overrightarrow{S(y_n, x_n)} = \lim_{n \to \infty} \overrightarrow{S(y_n, z_n)}$$

unde

$$R(x, y, z) = \frac{\rho(x, y) + \rho(y, z)}{\rho(x, z)}$$

Dacă (M, ρ) verifică condiţia Δx_0, expresia

$$m_{x_0}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{\rho(x_t, y_t)}{t}$$

este definită pentru orice $x, y \in V(x_0, 2\varepsilon)$, unde $x_t \in S(x_0, x)$ şi $\rho(x_0, x_t) = t\rho(x_0, x)$; $y_t \in S(x_0, y)$ şi $\rho(x_0, y_t) = t\rho(x_0, y)$ şi se numeşte metrică locală [2].

Cu ajutorul acestor noţiuni în [6] se defineşte adunarea locală $x + y = z$ pentru orice $x, y \in V(x_0, \varepsilon)$, $\forall x_0 \in M$, unde z se construieşte în felul următor:

Fie $z' \in S(x, y)$ astfel încît $\rho(x, z') = \rho(z', y)$

Definim $z \in \overrightarrow{S(x_0, z')}$ astfel încît $\rho(x_0, z') = \rho(z', z)$

Deasemenea folosind metrica locală m_{x0} putem în mod analog definim adunarea locală

$$x + y = z \quad [6]$$

În [6] se mai defineşte şi înmulţirea cu un scalar. Pentru $r \in (-2, 2)$ şi $x \in V(x_0, \varepsilon)$ se defineşte rx ca fiind elementul $y \in V$ pentru care au loc

1) $\rho(x_0, y) = |r| \rho(x_0, x)$

2) $x_0, x, y)$ dacă $r > 1$

(x_0, y, x) dacă $r \in [0, 1]$:

(y, x_0, x) dacă $r < 0$

Înmulțirea cu un scalar nu întotdeauna este distributivă față de adunarea $+$ dar este distributivă față de $+$. Vom presupune că $\rho = m_x$ (în caz contrar lucrăm cu metrica m_x).

În continuare presupunem că are loc

$$(x+y)+z = \left(\frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right)$$

pentru orice $x, y, z \in V(x_0, \varepsilon)$, pentru care $(x+y)+z$ este definit. Cum s-a arătat în [6], în acest caz adunarea locală este asociativă.

Folosind aceste noțiuni se poate introduce în anumite cazuri o structură diferențială pe (M, ρ). Pentru aceasta presupunem că spațiul metric verifică și următoarea condiție de omogenitate :

$$\forall x_1, x_2 \in M, \exists \delta > 0$$

astfel încît $V(x_1, \delta)$ și $V(x_2, \delta)$ să fie izometrice.

Fie $V(x_1, 2\varepsilon_1)$ și $V(x_2, 2\varepsilon_2)$ vecinătățile standard ale punctelor x_1 și x_2. Fără a se restrînge generalitatea putem presupune că $\delta \leqslant \varepsilon_1$, $\delta \leqslant \varepsilon_2$.

Propoziția 1. Orice izometrie $h : V(x_1, \delta) \to V(x_2, \delta)$ are propietatea că $h(\overleftrightarrow{S(x, y)}) = \overleftrightarrow{S(h(x), h(y))}$ deci în particular este o aplicație omogenă adică $h(rx) = rh(x)$ pentru orice $x \in V(x_1, \delta)$ și $r \in \mathbf{R}$ pentru care rx este definit și $rx \in V(x_1, \delta)$.

Demonstrație. Avînd în vedere unicitatea segmentului metric în $V(x_1, \delta)$ și $V(x_2, \delta)$ este suficient de verificat că tripletele liniare au imaginile deasemenea liniare. Fie $(x, y, z \in V(x_1, \delta)$ astfel încît $\rho(x, y)+\rho(y, z) = \rho(x, z)$ h izometrice deci $\rho(h(x), h(y))+\rho(h(y), h(z)) = \rho(h(x), h(z))$. Observînd că $h(x_1) = x_2$ rezultă imediat și omogenitatea lui h.

Propoziția 2. Orice izometrie $h : V(x_1, \delta) \to V(x_2, \delta)$ este aditivă în raport cu adunările locale definite în cele două vecinătăți standard.

Demonstrație. Fie $x, y \in V(x_1, \delta)$ și fie $z' \in S(x, y)$ astfel încît $\rho(x, z') = \rho(z', y)$.

Atunci și $h(z') \in S(h(x), h(y))$ și are loc $\rho(h(x), h(z')) = \rho(h(z'), h(y))$.

În baza propoziției 1 elementului $z \in \overrightarrow{S(x_1, z')}$ cu $\rho(x_1, z') = \rho(z', z)$ îi corespunde elementul $h(z) \in \overrightarrow{S(x_2, h(z'))}$ cu $\rho(x_2, h(z')) = \rho h(z'), h(z))$.

Ținînd seamă de faptul că $z = x+y$ și că $h(z) = h(x)+h(y)$ rezultă

$$h(x+y) = h(x)+h(y)$$

Pentru a ajunge la o structură diferențială pe spațiul metric (M, ρ) trebuie să construim modelul local.

Fie $x_0 \in M$ și $V(x_0, 2\varepsilon)$ vecinătatea standard. Considerăm $\Sigma(x_0, \varepsilon) = \{x^7 | ^7 x \in M, \rho(x_0, x) = \varepsilon\}$.

Evident că pentru orice $x, y \in \Sigma(x_0, \varepsilon)$, $x+y$ este definită și $x+y \in {}^7V(x_0, 2\varepsilon)$. Fie $Bx_0 = \mathbf{R} \times \Sigma(x_0, \varepsilon) = [0, \infty) \times [(x_0, \varepsilon)$.

Definim relația de echivalență R pe Bx_0 și anume $(\alpha, x)\ R\ R\ (\alpha, y)$ dacă și numai dacă $\alpha = \beta = 0$.

Vom arăta că $B = Bx_0 \mid R$ se poate organiza ca un spațiu Banach. Se notează $0 = [(0, x)]$, iar $[(\alpha, x)] = \alpha x$. Pentru $r \in \mathbf{R}$ definim

$$\begin{cases} r \cdot \alpha x = (r\alpha)\, x = [(r\alpha, x)] & \text{pentru } r > 0 \\ (-r\alpha)(-x) = [(-r\alpha\lambda, -x)] & \text{pentru } r < 0, \text{ unde } x + (-x) = x \end{cases}$$

Pentru a defini adunarea procedăm în felul următor :
Fie $\alpha x,\ \beta y \in B$.
Dacă $\alpha = 0$ atunci definim $\theta + \beta y = \beta y = \alpha x + \beta y$
Fie deci $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$. :

Considerăm elementele $x_1 = \dfrac{\alpha}{|\alpha| + |\beta|} \cdot x,\ y_1 = \dfrac{\beta}{|\alpha| + |\beta|}\ y \in V(x_0, \varepsilon)$.

Fie $z_1 \in S(x_1, y_1)$ cu $\rho(x_1, z_1) = \rho(z_1, q_1)$.

Presupunem $z_1 \neq x_0$. Fie $F_2 = \overrightarrow{S(x_0, z_1)} \cap \Sigma(x_0, \varepsilon)$.
Notăm $t = \rho(x_0, z_2 / \rho(x_0, z_1)$.
Luăm prin definiţie

$$z = \alpha x + \beta y = \frac{|\alpha| + |\beta|}{t} z_2 \in B.$$

Dacă $z_1 = x_0$ atunci prin definiţie luăm

$$\alpha x + \beta y = \theta.$$

(Evident că în acest caz avem sau $x = y$ şi $\alpha = -\beta$ sau (x, x_0, y) şi $\alpha = \beta$).
Deoarece adunarea în $V^7(x_0, \varepsilon)$ este asociativă uşor se verifică faptul că B este un grup comutativ. Ţinînd seama de definiţii rezultă că B are o structură naturală de spaţiu liniar.

Se poate arăta că vecinătăţile standard au proprietatea : $\forall x,\ y \in V(x_0, \varepsilon)$ au loc $\rho(x_0, x) + \rho(x_0, y) \geqslant 2\rho(x_0, z_1)$
unde $z_1 \in {}^7S(x, y)$ şi $\rho^7(x_1, z_1) = \rho^7(z_1, y)$.

Folosind acest fapt definim aplicaţia

$$n : B \to \mathbf{R}$$

prin $n(\alpha x) = |\alpha| \cdot I\varepsilon = || \alpha x ||$

Se verifică imediat că B este un spaţiu normat.

Completitudinea lui M ne arată că B este un spaţiu Banach. Evident că $V(x_0, \varepsilon)$ este izometrică cu sfera de rază ε din B. B este model local în.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, Metric foundations of geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 55, 465–492 1944.
2. H. Busemann, Metric methods in Finsler spaces in the foundations of geometry. Princeton, 1942.
3. H. Busemann, On spaces inwhich two points determine a geodesic. Trans. Amer. Math. Soc. 54, 171–184, 1943.
4. L. Blumenthal, Theory and applications of distance geometry. Oxford 1955.
5. B. Pitchner, M. Smilley, Transitivites of betweennes. Trans. Amer. Math. Soc. 52, 95–127, 1942.
6. B. Rendi, Structura algebrică a spaţiilor metrice. Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, Series Math. Mec. Fasc. 1, 1970.

STRUCTURES DIFFÉRENTIABLES SUR DES ESPACES MÉTRIQUES CONVEXES

RESUMÉ

Dans cet ouvrage on construire un modèle local pour un espace métrique (M, ρ) qui verifie quelques conditions de homogéneité, convexité et d'exterieur convexité locale.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 1 —1979**

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA EFECTULUI GUILLEMIN INVERS

DE

RADA BAEA

Efectele magnetostrictive constau fie în modificarea proprietăţilor magnetice ale unei substanţe prin solicitarea ei mecanică, fie în influenţarea proprietăţilor mecanice prin magnetizarea ei [1].

Rfectul Guillemin [2] constă în faptul că o probă feromagnetică plasată într-un cîmp magnetic continuu suferă o deformaţie de încovoiere.

În prezentul articol se continuă unele cercetări experimentale asupra tensiunii electromotoare indusă în efect, funcţie de condiţiile obţinerii probelor şi tratamentele termice la care au fost supuse.

Instalaţia experimentală [3] permite deformarea controlată a probei; pătura feromagnetică este plasată într-un cîmp magnetic longitudinal alternativ; ea poate fi solicitată la încovoiere de întindere respectiv compresiune, ambele paralele între ele şi perpendiculare la axa geometrică a probei.

Probele studiate constau din plăci de *Cu*, la care una din feţe este acoperită cu o pătură de material feromagnetic depusă electrolitic într-o baie de următoarea compoziţie :

$NiSO_4$ ... 8,8 g/l $\qquad P_H = 3{,}5$

HBO_3 ... 15 g/l $\qquad J = 0{,}6$ A/dm^2

$NiCl_2$ ... 8 g/l

Admiţînd că proba studiată prezintă o anizotropie uniaxială ca rezultat al deformării plastice de încovoiere, energia înmagazinată în unitatea de volum a probei feromagnetice solicitate plasate într-un cîmp magnetic longitudinal H_y este dată de relaţia :

$$E = K \sin^2(\psi - \alpha) + \frac{3}{2}\lambda_s \sigma \sin^2 \alpha - M_s \cdot H_y \cos \alpha$$

unde : K — reprezintă constanta de anizotropie, ψ — unghiul format de axa de uşoară magnetizare cu axa geometrică a probei, α — unghiul format de magnetizaţia M_s cu axa geometrică, iar σ — solicitarea de întindere. Pentru a urmări caracterul anizotropiei formate ca rezultat al deformării plastice la încovoiere, fiecare probă a fost supusă unui tratament termic, la temperaturi din ce în ce mai mari, iar după fiecare tratament termic, s-a studiat dependenţa tensiunii electromotoare induse în bobină funcţie de deformaţia la încovoiere. În fig. 1 prezentăm rezultatele măsurătorilor experimentale pentru o probă obţinută în baia amintită cu un adaus de 0,8 g/l zaharină. Se constată o asimetrie a efectului măsurat ; la întindere probele sînt mult mai sensibile decît la compresiune.

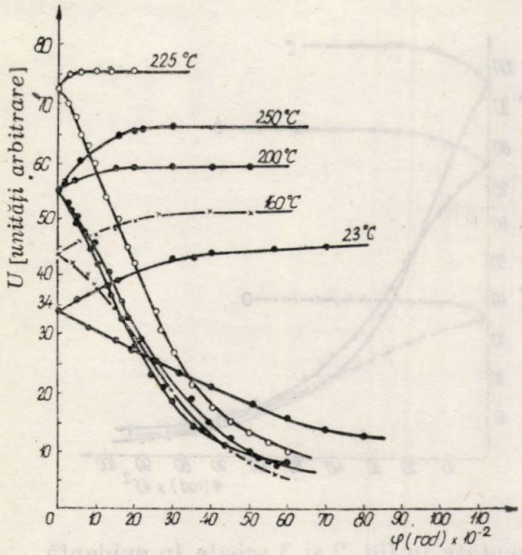


Fig. 1. Dependența tensiunii electromotoare U în efect Guillemin invers de deformare la încovoiere ; partea superioară a curbelor corespunde compresiunii iar cea inferioară întinderii ; probele au fost obținute într-o baie cu adaus de 0,8 g/l zaharină și supuse tratamentelor termice indicate pe figură.

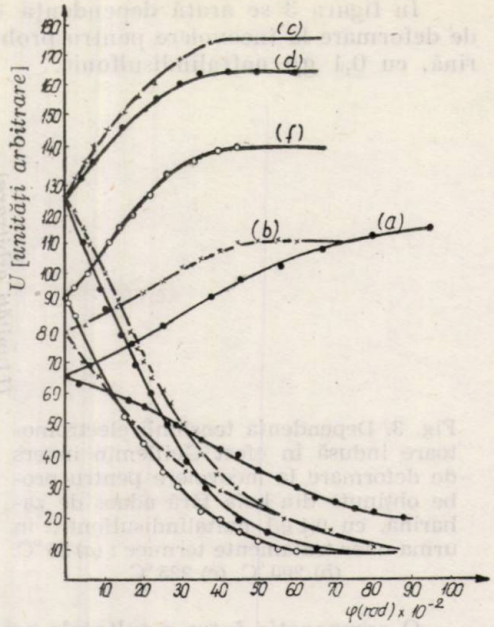


Fig. 2. Dependența tensiunii electromotoare indusă în efect Guillemin invers de deformarea la încovoiere pentru probe obținute din aceeeași baie, plus un adaus de 0,1 g/l naftalin-disulfonic, în urma unor tratamente termice : (*a*) 25 °C, (*b*) 180 °C, (*c*) 200 °C, (*d*) 225 °C (*f*) 250 °C.

Tratamentul termic efectuat sub temperatura de recristalizare cu răcire lentă, duce la ordonarea defectelor punctuale înlesnind inversările vectorilor de magnetizare ; aceasta face ca pentru valori mici ale solicitării de compresiune inversările magnetizării să fie totale, iar efectul maxim.

La o valoare constantă a cîmpului magnetic alternativ în care este plasată proba, t.e.m. indusă în efect, pentru o temperatură de tratament termic dată, prezintă o valoare maximă U_{max} în cazul solicitării de compresiune și tinde către zero la întindere.

Mărimea deformației capabile să asigure efectul maxim U_{max} scade cu creșterea temperaturii de tratament termic.

Se știe că temperatura de recristalizare T_r a nichelului este sensibilă la compoziția băii electrolitice. Din măsurătorile efectuate asupra unor probe obținute într-o baie cu un adaus de 0,8 g/l zaharină (fig. 1) reiese că U_{max} crește cu temperatura de tratament termic pînă la 225 °C, în apropierea temperaturii de recristalizare, apoi efectul scade. Dacă în baia electrolitică respectivă se adaugă naftalindisulfonic, de exemplu 0,1 g/l, temperatura corespunzătoare lui U_{max} scade la 200 °C (fig. 2).

Rezultă că prin măsurători asupra unor probe supuse la tratamente termice nu prea înalte, se pot trage concluzii asupra temperaturii de recristalizare. Influența acidului naftalindisulfonic asupra proprietăților magnetoelastice la Ni electrolitic este arătată în [4].

În figura 3 se arată dependența t.e.m. indusă în efect Guillemin invers de deformare la încovoiere pentru probe obținute din baia fără adaus de zaharină, cu 0,1 g/l naftalindisulfonic.

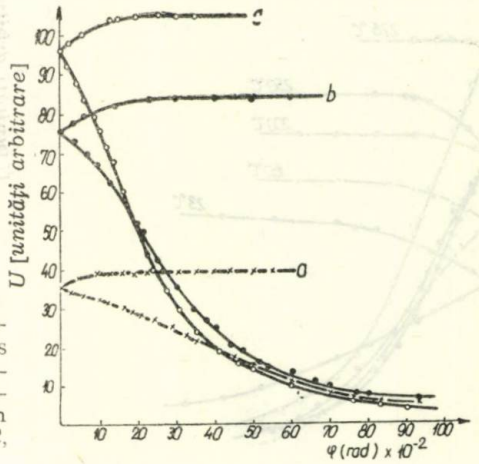


Fig. 3. Dependența tensiunii electromotoare indusă în efect Guillemin invers de deformare la încovoiere pentru probe obținute din baia fără adaos de zaharină, cu 0,1 g/l naftalindisulfonic, în urma unor tratamente termice : (*a*) 25 °C, (*b*) 200 °C, (*c*) 225 °C.

O comparație între rezultatele prezentate în fig. 2 și 3 scoate în evidență influența zaharinei asupra sensibilității magnetoelastice definită prin raportul $dE/d\varphi$ (în care E reprezintă t.e.m. indusă în efect, iar φ – deformația la încovoiere) ; reiese că zaharina mărește sensibilitatea magnetoelastică la compresiune iar adausul de naftalindisulfonic la întindere. În ambele cazuri sensibilitatea magnetoelastică atinge o valoare maximă pentru o temperatură de tratament termic corespunzătoare efectului maxim.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cișman, B.F. Rothenstein, A. Policec, Fenomene fizice în materiale feromagnetice solicitate
2. G. Wiedemann, Pogd. Ann., 117, 193 (1965)
3. R. Baea, Rev. Roum. Phys. Tom. 18, nr. 9 București, 1973
4. O.F.G. Aczel, B.F. Rothenstein, R. Baea and S. Rusescu, Thin. Solid. Films, 20/1974/ S 11—S 13.

RECHERCHES EXPÉRIMENTAUX SUR L'EFFET GUILLEMIN INVERS

RÉSUMÉ

Dans ce travail on présente l'influence des traitements thermiques et de la composition du bain éléctrolytique utilisé sur les propriétés magnétoelastiques des couches minces de Ni életrolytique.

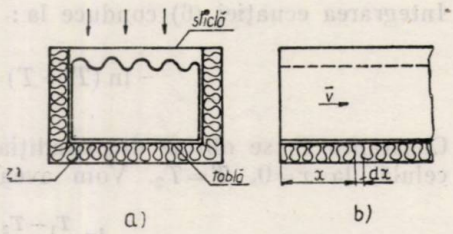
Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) Fascicola 1—1979

CONSIDERAŢII ASUPRA PARAMETRILOR CARE DETERMINĂ LUNGIMEA DE PARCURS LA INSOLATOARELE PLANE ÎN REGIM DINAMIC

DE
CRISTIAN MARCU, COLETA DE SABATA

1. Considerăm o celulă de insolator plan, avînd secţiunea dreptunghiulară, trei pereţi din tablă dreaptă neagră şi al patrulea din tablă ondulată neagră. Faţa anterioară, peste tabla ondulată, este acoperită cu o placă de sticlă iar celelalte trei părţi sînt izolate faţă de exterior astfel încît pierderile să fie neglijabile (fig. 1 *a* şi *b*).

Fig. 1



Sub influenţa radiaţiei solare, uniformă şi constantă, pereţii din tablă ai celulei se încălzesc la temperatura T_1, aceeaşi în toate punctele, după atingerea echilibrului. Prin celulă se trimite un curent de aer de debit volumic D_v, care pătrunde cu temperatura T_2.

Fie o secţiune prin insolator, între abscisele x şi $x+dx$; prin spălarea de către aer a porţiunii dx, aerul primeşte în intervalul de timp $d\tau$ cantitatea de căldură:

$$dQ_c=\lambda \cdot l \cdot dx\,(T_1-T)\,d\tau \tag{1}$$

în care s-a notat prin:

λ : coeficientul de transmisie al căldurii de la tablă la aer (j/m^2·grad·s)

T: temperatura aerului (°C)

l : lungimea conturului tablei calde (fig. 1a) (m)

Căldura primită în $d\tau$ de aerul din porţiunea $(x,\ x+dx)$ a celulei se poate scrie:

$$dQ_p=\rho \cdot c \cdot S \cdot dx \cdot dT \tag{2}$$

în care s-a notat prin:

ρ : densitatea aerului (kg/m^3)

c : căldura specifică a aerului (j/kg·grad)

S: aria secţiunii transversale a materialului celulei (m^2)

2. Vom lucra mai întîi în aproximația ce corespunde unei densități constante a aerului din celulă, lucru adevărat dacă diferența dintre temperatura aerului la intrarea și ieșirea din insolator nu este prea mare. Dacă $v=ct.$ este viteza de circulație a aerului prin insolator, avem:

$$d\tau = \frac{dx}{v} \tag{3}$$

și din (3) și (1) obținem:

$$dQ_c = \frac{\lambda l}{v}(T_1 - T)(dx)^2 \tag{4}$$

iar din (4) și (2) prin egalare:

$$\rho \cdot c \cdot S \cdot dx \cdot dT = \frac{\lambda_l}{v}(T_1 - T)(dx)^2 \tag{5}$$

care, după separarea variabilelor, devine:

$$\frac{dT}{T_1 - T} = \frac{\lambda \cdot l}{v \cdot S \cdot \rho \cdot c} dx \tag{6}$$

Integrarea ecuației (6) conduce la:

$$-\ln(T_1 - T) = \frac{\lambda \cdot l}{v \cdot S \cdot \rho \cdot c} x + \ln C_1 \tag{7}$$

Constanta C_1 se obține din condiția inițială și anume la intrarea aerului în celulă, la $x=0$, $T=T_2$. Vom avea:

$$\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T} = \frac{\lambda \cdot l}{v \cdot S \cdot \rho \cdot c} x \tag{8}$$

Relația (8) permite determinarea lungimii x a insolatorului pe parcursul căruia, în condiții date, aerul se va încălzi de la T_2 la T:

$$x = \frac{v \cdot S \cdot \rho \cdot c}{\lambda \cdot l} \ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T} \tag{9}$$

sau introducînd în (9) debitul $D_v = S \cdot v$, avem:

$$x = \frac{D_v \cdot \rho c}{\lambda \cdot l} \ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T} \tag{10}$$

3. În cazul unor instalații de captare a energiei solare proiectate să realizeze o diferență de temperatură relativ mare pentru aerul ce intră, respectiv iese, din insolator – instalații cu efect multiplu de seră – de ex., va trebui să se ia în considerare variația densității aerului cu temperatura, ceea ce va modifica ec. (5) în forma:

$$\frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot T} dT = \frac{\lambda \cdot l}{S \cdot v \cdot c}(T_1 - T) dx \tag{11}$$

Prin separarea variabilelor ea devine:

$$\frac{dT}{(T_1 - T) + \gamma \cdot T(T_1 - T)} = \frac{\lambda \cdot l}{S \cdot v \cdot c \cdot \rho_0} dx$$

sau

$$\frac{dT}{T_1-(1-\gamma T_1)\,T-\gamma T^2}=\frac{\lambda\cdot l}{S\cdot v\cdot c\cdot \rho_0}\,dx \tag{12}$$

Notăm:

$$A=T_1 \quad 2B=-(1-\gamma\cdot T_1) \quad C=-\gamma \tag{13}$$

și ecuația devine:

$$\frac{dT}{A+2BT+CT^2}=\frac{\lambda\cdot l}{v\cdot S\cdot \rho_0\cdot c}\,dx \tag{14}$$

Pentru valorile uzuale ale constantelor A, B, C, este adevărată inegalitatea $AC<B^2$ și atunci prin integrarea ec. (14) primim:

$$\frac{1}{2\,[B^2-AC]^{1/2}}\ln\left\{\frac{CT+B-(B^2-AC)^{1/2}}{CT+B+(B^2-AC)^{1/2}}\right\}=\frac{\lambda\cdot l}{v\cdot S\cdot \rho_0\cdot c}\,x+\ln C_2 \tag{15}$$

sau:

$$\frac{1}{[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\cdot\gamma\cdot T_1]^{1/2}}\ln\frac{-\gamma\cdot T-\frac{1-\gamma\cdot T_1}{2}-\frac{[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\cdot\gamma\cdot T_1]^{1/2}}{2}}{-\gamma\cdot T-\frac{1-\gamma\cdot T_1}{2}+\frac{[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\cdot\gamma\cdot T_1]^{1/2}}{2}}=$$

$$=\frac{\lambda\cdot l}{v\cdot S\cdot \rho_0\cdot c}\,x+\ln\,C_2 \tag{16}$$

Determinarea constantei C_2 se face ca anterior, la $x=0$, $T=T_2$:

$$C_2=\frac{-\gamma\cdot T_2-\frac{(1-\gamma\cdot T_1)}{2}-\frac{[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\cdot\gamma\cdot T_1]^{1/2}}{2}}{-\gamma\cdot T_2-\frac{(1-\gamma\cdot T_1)}{2}+\frac{[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\cdot\gamma\cdot T_1]^{1/2}}{2}} \tag{17}$$

Introducînd (17) în (16) și ordonînd obținem lungimea circuitului de aer într-un insolator plan cu circulație forțată, pentru a se obține o încălzire a sa de la T_2 la T:

$$x=\frac{S\cdot v\cdot \rho_0\cdot c}{\lambda\cdot l\,[(1-\gamma T_1)^2+4\gamma\cdot T_1]^{1/2}}\times$$

$$\times\ln\frac{\{2\cdot\gamma\cdot T+(1-\gamma\cdot T_1)+[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\gamma\cdot T_1]^{1/2}\}\,\{2\gamma T_2+(1-\gamma\cdot T_1)-([1-\gamma\cdot T_1)^2+4\gamma\cdot T_1]^{1/2}\}}{\{2\cdot\gamma\cdot T+(1-\gamma\cdot T_1)-[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\gamma\cdot T_1]^{1/2}\}\,\{2\gamma T_2+(1-\gamma\cdot T_1)-[(1-\gamma\cdot T_1)^2+4\gamma\cdot T_1]\}^{1/2}} \tag{18}$$

Relația se poate scrie mai concis folosind notațiile:

$$1-\gamma\cdot T_1=a \quad 4\gamma T_1=b$$

și avem:

$$x=\frac{S\cdot v\cdot \rho_0\cdot c}{\lambda\cdot l\,[a^2+b]^{1/2}}\ln\frac{(2\cdot\gamma\cdot T+a+\sqrt{a^2+b})\,(2\gamma T_2+a-\sqrt{a^2+b})}{(2\cdot\gamma\cdot T+a-\sqrt{a^2+b}\,(2\gamma T_2+a+\sqrt{a^2+b})} \tag{19}$$

Gradul relativ ridicat de complexitate în calculul rel. (19) față de rel. (10) impune o analiză atentă asupra cazurilor în care ea trebuie să fie folosită, fiind recomandată efectuarea unui studiu pe calculator.

BIBLIOGRAFIE

1. Dimitriu E. Vîlcea: Termotehnica în construcții, Ed. Acad. R.S.R., București (1970)
2. Tabor H.,: Solar energy collector desing Bull. Res. Council of Israel 5 C (1), 5 (1956)
3. Focșa V.: Higrotermica și acustica clădirilor, Ed. did. și pedagogică, București (1975)

CONSIDÉRATIONS CONCERNAND LES PARAMÈTRES DETERMINAND LA LONGUEUR DU TRAJET POUR UN CAPTATEUR SOLAIRE PLAN EN RÉGIME DYNAMIQUE

RESUMÉ

On étudie les relations que éxistent entre la longueur du trajet de l'agent thérmique dans un insolateur plan et la différence de température réalisé par rapport à l'ambiance dans les périodes chaudes et froides de l'année.

On fait l'analyse dans deux cas: alors qu'on tienne compte et qu'on ne tienne pas de la variation de la densité de l'air avec la température.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) Fascicola 1 —1979

INFLUENŢA FORMEI ŞI DIMENSIUNILOR CELULEI DE CAPTARE A ENERGIEI SOLARE CU INSOLATOARE PLANE ÎN REGIM DINAMIC

DE

COLETA DE SABATA, CRISTIAN MARCU

În [1] s-a stabilit teoretic expresia lungimii de parcurs a unui insolator plan funcţionînd în regim dinamic, cu circulaţie forţată de aer, în funcţie de parametrii care îi determină funcţionarea.

Prima din relaţiile obţinute, în care nu s-a ţinut seama de variaţia densităţii aerului prin încălzire, este :

$$x = \frac{v \cdot S \cdot \rho \cdot c}{\lambda \cdot l} \ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T} = \frac{D_v \cdot \rho \cdot c}{\lambda \cdot l} \ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T} \qquad (1)$$

cu semnificaţia următoare a mărimilor ce apar :

x — lungimea de parcurs a aerului (m)
v — viteza de circulaţie forţată a aerului (m/s)
S — secţiunea celulei (m^2)
c — căldura specifică a aerului (j/kg·grad)
ρ — densitatea aerului (kg/m^3)
λ — coeficientul de conductibilitate ($j/m^2 \cdot grad \cdot s$)
T_2 — temperatura aerului la intrare (°C)
T_1 — temperatura tablei calde (°C)
T — temperatura aerului la ieşire (°C)

Numărul mare de parametri ce intervin şi combinaţiile valorice posibile, determinate de condiţiile meteo foarte variate în practică, au impus un studiu de optimizare pe calculatorul Felix C 256 pentru diverse debite ($D_v = v \cdot S$), intervale de temperatură şi dimensiuni ale secţiunii de circulaţie a aerului prin insolator.

Viteza de circulaţie a aerului a fost $v \in [1, 10]$ m/s, ceea ce, în funcţie de deschiderea aleasă, a condus la debite $D_v \in [1, 3]$ m^3/s adică $D_v \in [3\,600, 10\,800]$ m^3/h.

În figura 1 am sintetizat dependenţa lungimii de parcurs x de forma şi aria secţiunii de circulaţie pentru aceleaşi intervale de temperatură.

Analiza acestor rezultate scoate în evidenţă importanţa formei şi dimensiunilor ferestrei de circulaţie a agentului termic prin insolator.

Cazul A : Aria secţiunii de circulaţie este $(1 \times 0{,}3)$ m^2 ceea ce asigură debite la 10 800 m^3/h la viteze de circulaţie a aerului de pînă la 10 m/s.

Funcţionînd la temperaturi ambiante între -10 °C şi $+10$ °C şi asigurînd temperaturi de ieşire între $+25$ °C şi $+45$ °C lungimea de circulaţie este de 300 m. În aceleaşi condiţii constructive, vara cînd temperatura ambiantă este de $+30$ °C şi temperatura la ieşire de $+60$ °C, lungimea poate fi redusă la cca 175 m, aproape jumătate faţă de cazul anterior.

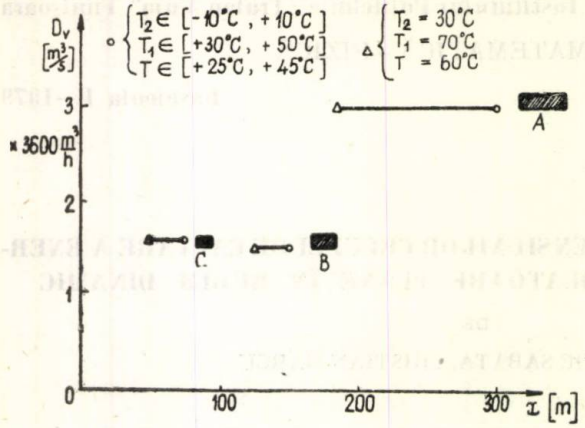


Fig. 1

În orice caz lungimea drumului parcurs de agent este mare.

Cazul B: Aria secțiunii de circulație este $(0,5 \times 0,3)$ m² ceea ce asigură debite maxime de 5 400 m³/h ($v = 10$ m/s). De data aceasta între funcționarea la temperaturi relativ scăzute și la temperaturi de vară, diferența de lungimi a parcursului este mult mai mică 150 m – 130 m, lungimea însăși reducîndu-se mult.

Cazul C: Aria secțiunii de circulație este $(0,25 \times 0,25)$ m² debitul maxim la $v = 10$ m/s este de aproximativ 6 000 m³/h, lungimea parcursului este cea mai mică, între 50 m și 75 m.

Este evident că din punct de vedere a funcționării, insolatoarele cu aer de tipul C sînt cele mai avantajoase, cu observația că din punct de vedere constructiv sînt ceva mai complicate și mai scumpe, necesitînd materiale, manoperă, în plus la confecționare.

Autorii mulțumesc pe această cale studentului Emil Stamatoiu de la Fac. de Electrotehnică, pentru ajutorul dat la realizarea și rularea programului pe calculator.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Marcu, C. De Sabata, „Considerații asupra parametrilor care determină lungimea de parcurs la insolatoarele plane în regim dinamic", Bul. St. Tehn. I.P.T. Nr. 1, 1979.

L'INFLUENCE DE LA FORME ET DES DIMENSIONS D'UN CAPTATEUR SOLAIRE PLAN DESTINÉ À FONCTIONNER EN RÉGIE DYNAMIQUE

RESUMÉ

Dans l'ouvrage on présente les resultats obtenus à l'aide d'un programme roulé sur une calculatrice Felix C 256 concernand la longueur du trajet de l'agent thèrmique dans un captateur plan en dépendence de la section de celui-ci et du régime thèrmique de l'ambiance.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom 24 (38) Fascicola 1—1979

CONSIDERAŢII TEORETICE ŞI VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA PROCESULUI DE USCARE A LEMNULUI

DE
MARIA BOLDAN, DUŞAN POPOV

După cum se cunoaşte din literatura de specialitate, pentru a putea fi utilizat în scopuri industriale, lemnul trebuie să aibe o umiditate absolută sub 7%, adică să fie „uscat". În această stare, lemnul are o formă stabilă, nu se contrage, greutatea lui scade, deci e mai uşor de transportat, îşi măreşte rezistenţa mecanică, îşi îmbunătăţeşte calităţile termice şi electrice. Prin uscare se evită descompunerea şi degradarea lemnului (prin acţiunea unor ciuperci şi insecte), iar lacurile protectoare se pot aplica mai uşor pe suprafaţa lemnului uscat, decît a celui umed.

Uscarea se realizează în camere de uscare (din zidărie sau cutii metalice) sau tunele de uscare, în funcţie de specie, sortiment, umiditatea iniţială şi utilizarea lemnului [1], după anumite trepte de regim, care presupun o anumită durată, temperatură şi umiditate a aerului din interiorul uscătoriei, caracteristici bine stabilite pentru fiecare specie de lemn utilizat în scopuri industriale [2].

Scopul preocupărilor noastre a fost studiul în laborator al procesului de uscare a lemnului la temperaturi sub 100 °C, temperaturi care se pot obţine relativ uşor cu ajutorul instalaţiilor de captare a energiei solare.

Drept cameră de încălzire am utilizat o etuvă de tip *AEG*, alimentată de la reţea prin intermediul unui autotransformator, tensiunea şi intensitatea curentului fiind în permanenţă controlate. Aceasta permite obţinerea unei pante aproape orizontale de variaţie în timp a temperaturii din interiorul etuvei, putîndu-se astfel realiza regimuri de temperatură similare celor din cadrul procesului industrial de uscare. Umiditatea aerului, necesară în timpul uscării, am obţinut-o prin evaporarea apei din tăvi plasate în interiorul etuvei.

În timpul uscării am urmărit variaţia masei unor probe din lemn, provenind din scînduri de fag de grosimi standard, pe care le-am tăiat la lungimi diferite. Am menţinut temperatura constantă prin variaţia tensiunii de alimentare a etuvei.

Experimental se constată că variaţia masei m a probei în funcţie de timpul de uscare t are forma din fig. 1, unde am notat punctele obţinute experimental cu semnul x.

Această variaţie ne conduce la ideea că ea ar fi de tip exponenţial, adică ar avea forma:

$$m(t)=Ae^{-bt}+B, \tag{1}$$

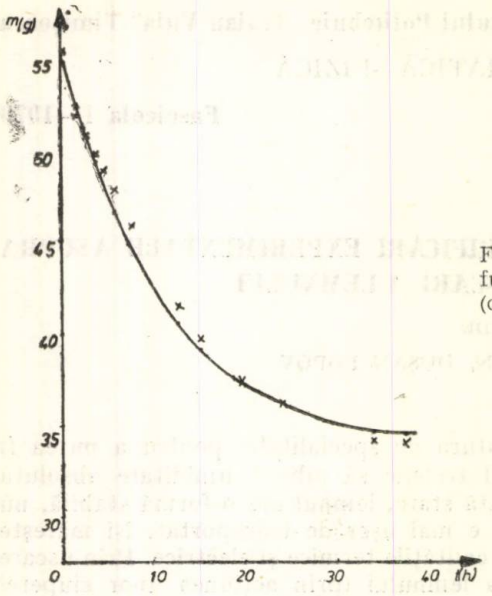


Fig. Variația masei probei de lemn în funcție de timpul de uscare : a — teoretic (curba continuă) ; b — experimental (punctele notate cu semnul x).

cu următoarele condiții limită :

$$\left.\begin{aligned} t=0, \quad & m\,(0)=m_i, \\ t=\infty, \quad & m\,(\infty)=m_f, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

unde constanta m_i are semnificația masei inițiale a probei, iar m_f este masa probei în stare „perfect uscată", o stare ideală, nerealizabilă practic. Ea se determină prin cîntăriri succesive, iar cînd variația masei este sub 1%, la două cîntăriri succesive, atunci lemnul se consideră „perfect uscat".

Relațiile (1) și (2) dau forma finală :

$$m\,(t)=(m_i-m_f)\,e^{-bt}+m_f. \tag{3}$$

Pentru a verifica dacă ipoteza variației exponențiale $m\,(t)$ este corectă, am reprezentat relația (3) în coordonate semilogaritmice :

$$\ln\,(m-m_f)=\ln\,(m_i-m_f)-bt. \tag{4}$$

De pe graficul din fig. 2 se observă că punctele experimentale, notate cu semnul x, se înscriu foarte bine pe o dreaptă, a cărei coeficient unghiular este :

$$b=\frac{1}{t_2-t_1}\ln\frac{m_1-m_f}{m_2-m_f} \tag{5}$$

Pentru determinarea lui b, am luat două mase m_1 și m_2, ale căror coordonate semilogaritmice sînt situate exact pe dreapta din fig. 2. Această valoare a lui b am introdus-o în formula (3), calculînd astfel masele teoretice corespunzătoare diferiților timpi de uscare, pentru m_i și m_f determinați. Punctele corespunzătoare le-am trecut tot pe graficul din fig. 1, obținînd curba continuă. Concordanța cu datele experimentale este foarte bună, ceea ce dovedește că ipoteza (3) este corectă. Aceleeași mase teoretice, înlocuite în formula (4), dau curba continuă de pe graficul din fig. 2. Concordanța este de asemenea foarte bună.

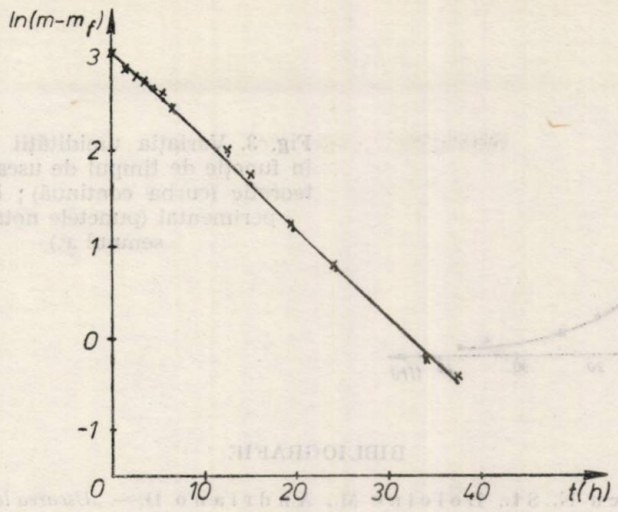


Fig. 2. Variația logaritmului maselor calculate teoretic cu formula (3) este o dreaptă. Punctele experimentale s-au notat cu semnul x.

Umiditatea absolută se definește ca raportul dintre masa apei evaporate după un timp t și masa probei supuse uscării, în stare „perfect uscată", m_f [3] :

$$u = \frac{m - m_f}{m_f} \tag{6}$$

O variație infinitezimală a masei, dm, produce o variație tot infinitezimală a umidității, du, încît avem relația :

$$du\,(t) = \frac{1}{m_f}\, dm(t), \tag{7}$$

care, integrată între limitele 0 și t, ne dă, ținînd cont de relația (3) :

$$u\,(t) - u\,(0) = \frac{m_i - m_f}{m_f}\, e^{-bt} - \frac{m_i - m_f}{m_f} \tag{8}$$

Deci, în ipoteza (3), variația umidității absolute în funcție de timp, are forma :

$$u\,(t) = \frac{m_i - m_f}{m_f}\, e^{-bt} \tag{9}$$

Factorul din fața exponențialei reprezintă umiditatea inițială, pe care am notat-o cu $u\,(o)$.

Relația (9), reprezentată grafic, are forma curbei continue din fig. 3, iar masele găsite experimental, înlocuite în formula (6), dau pentru umiditate punctele notate cu semnul x de pe aceeași figură. Se observă o concordanță foarte bună între valorile teoretice și cele experimentale.

În concluzie, putem spune că ipoteza noastră, de aproximare exponențială a variației masei probei de lemn, supusă uscării, în funcție de timpul de uscare, dă o concordanță foarte bună între datele teoretice și cele experimentale. Același lucru se poate spune, în consecință, și despre variația în timp a umidității absolute.

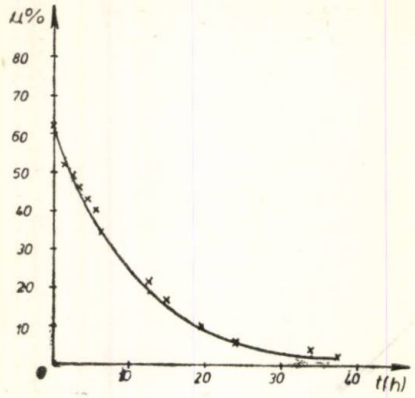


Fig. 3. Variația umidității absolute în funcție de timpul de uscare : *a* — teoretic (curba continuă) ; *b* — experimental (punctele notate cu semnul *x*.)

BIBLIOGRAFIE

1. Dumitrescu N. St., Boiciuc M., Andriano D. — „*Uscarea lemnului*", Editura tehnică — București, 1969, p. 426.
2. Râmbu I., Florescu I. — „*Tehnologia prelucrării lemnului*", Editura tehnică — București, 1978, v. 1, cap. 4.
3. Nicolau Th., Apostol I. — „*Umidimetre electronice*", Editura tehnică — București, 1973, p. 9.

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES ET VÉRIFICATIONS ÉXPERIMENTALES SUR LE PROCESSUS DE SECHAGE DU BOIS

RESUMÉ

On étudie le processus de séchage du bois dans l'approximation d'une variation exponentielle de la masse du bois durant le temps. On constate une bonne concordance entre les considerations théoriques et les résultats experimentaux.

F 7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ – FIZICĂ

Tom 24 (38) Fascicola 2

IULIE–DECEMBRIE
1979

COLEGIUL DE REDACȚIE

Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON, Prof. dr. ing GHEORGHE CREȚU. Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAȘ — redactor șef, Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R., Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU, Prof. dr. ing. VASILE COCHECI, Prof. dr. BORISLAV CRISTICI, Prof. dr.ing. COLETA DE SABATA, Prof dr. ing. TOMA DORDEA. Prof. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ, Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS, Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU, Prof, dr. ing. TIBERIU MUREȘAN, Prof. dr. ing. IOAN NIȚA, Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ȘORA, Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU — secretar de colegiu

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratlelt.ár

COMITETUL DE REDACȚIE

I. *Matematică-fizică*

Prof. dr. BORISLAV CRSTICI — redactor responsabil, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS — red. resp. adj., Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU, Conf. dr. EUGEN BURLACU — secretar de redacție.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

SUMAR

R. A. MELTER : O teoremă de reprezentare pentru B.M. Algebre 5

V. POPA : O teoremă uzuală de punct fix pentru funcţii multivoce 7

I.E. PEČARIĆ : Asupra inegalităţii lui T. Popoviciu 9

P. DRAGILA : Varietăţi neolonome V_3^2 echivalente cu planul eliptic 16

P.N. IZVERCIAN ; C. FINSTER : Funcţii H-olomorfe pe algebre polinomiale cu radical. 25

CARMENCITA UROSU : Produse subdirecte de varietăţi de algebre universale 29

B. CRISTICI ; M. NEAGU ; G. TUDOR : Construcţia unor clase de soluţii ale unor ecuaţii funcţionale 33

H. LUDESCHER : Notă asupra mărginirii uniforme a grupurilor de transformări topologice. 36

F. RADU : Operatori de derivare şi cîmpuri de vectori pe varietăţi diferenţiabile 40

J.E. PEČARIĆ : Asupra unei inegalităţi a lui T.Popoviciu II 44

DORINA RENDI şi B. RENDI : Structuri diferenţiabile pe spaţii metrice convexe II 47

M. BORNEAS : Asupra necanicii generalizate a particulelor cu spin 49

COLETA DE SABATA ; AURICA MUNTEANU ; C. MARCU ; I. MIHALCA ; DOROTHEA MIHAILOVICI ; I. LUMINOSU ; M. LORINCZ : Cercetări teoretice şi experimentale asupra optiizării instalaţiilor industriale de termoconversie a energiei solare. 55

M. BORNEAS ; M. DAVID ; I. DAMIAN : Relaţii de comutare şi anticomutare generalizate 64

Buletin scientifique et technique de l'Institut politechnique „Traian Vuia" Timișoara

MATEMATIQUE—PHYSIQUE

Tome 24/38 **Fascicule 2** **Juillet-Decembre 1979**

SOMMAIRE

R. A. MELTER : A Representation Theorem for B. M. Algebras ... 5

V. POPA : A common fixed point theorem for multifunctions ... 7

J. E. PEČARIĆ : On an ineguality of T. Popoviciu I 9

P. DRAGILA : Variétés non holonomes V_3^2 équivalentes avec le plan elliptique 16

P. N. IZVERCIAN, C. FINSTER : H-Holomorphe Funcktionen auf einer Polynomial algebra mit Radikal 25

CARMENCITA UROSU : Produits subdirects des variétés des algèbres universelles 29

B. CRSTICI, M. NEAGU, G. TUDOR : La construction des certaines classes des solutions pour quelques équations fonctionnelles 33

H. LUDESCHER : Note on the uniform bouddedness of the topological transformation groupe 36

F. RADU : Les opérateurs des derivation et champ des vecteurs sur les variétés différentiables 40

J. E. PEČARIĆ : On an inequality of T. Popoviciu II 44

DORINA RENDI, B. RENDI : Differentiable structures sur espaces métriques convexes II 47

M. BORNEAS : On the generalized mechanics of spiuning particles 49

COLETA DE SABATA, AURICA MUNTEANU, C. MARCU, I. MIHALCA, DOROTHEA MIHAILOVICI, I. LUMINOSU, M. LŐRINCZ : Theoretische und experimentelle Untersuchungen der Optimisierung der Anlagen in bezug auf Thermokonversion der Sonnenenergie 55

M. BORNEAS, M. DAVID, I. DAMIAN : Generalized commutation and anticommutation relation 64

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

A REPRESENTATION THEOREM FOR B.M. ALGEBRAS

BY

R.A. MELTER

B.M. algebras were defined by Gr. C. Moisil in [2]. E. Burlacu [1] showed that certain B. M. algebras can be represented as Boolean algebras of Boolean matrices together with the additional operation of matrix multiplication. In this paper the autor proves that another class of B.M. algebras have a representation as product algebras associated with a semigroup.

Definition 1. A B. M. algebra is a Boolean algebra B together with a mapping m : $B\times B\to B$ such that if $m(x, y)=xy$ then

I $a(bc)=(ab)c$

II $(a \cup b)=ac \cup bc$; $c(a \cup b)=ca \cup cb$; for $a, b, c\in B$

III There is an element u in B such that $au=ua=a$ for $a\in B$

IV If 0 is the smallest element of B then $0a=a0=0$ for all $a\in B$.

Definition 2. Let S be a semigroup with identity. The product algebra of S consists of the set of all subsets of S, $P(S)$, with the usual operations of set union and intersection. On $P(S)$ an operation $\odot$ is defined by

$$S\odot T=\{xy|x\in S,\ y\in T\}$$

Theorem. *A B. M.* algebra is isomorphic to the product algebra of a semigroup with unit if and only if

① B is complete and atomic.

② If a and b are atoms in B, then so is ab.

③ If z is an atom and $z\leqslant xy$, then there exist atoms c and d such that $z=cd$ and $c\leqslant x$, $d\leqslant y$.

④ the unit element specified in III is an atom.

Proof. The product algebra of a semigroup with identity clearly is a B. M. algebra wich satisfies ①, ②, ③ and ④. On the otherhand suppose that B is a B. M. algebra wich satisfies ①, ②, ③ and ④.

Let S be the semigroup of atoms of B. Define a mapping from B to $P(S)$ by $f(x)=\{a|a$ is an atom and $a\leqslant x\}$. We will show that f is a bijection with the following properties:

(*i*) $f(x\cup y)=f(x)\cup f(y)$

(*ii*) $f(x\cup y)=f(x)\cap f(y)$

(*iii*) $f(xy)=f(x)\odot f(y)$

To show that f is surjective let W be an element of $P(S)$, then $W=f(x)$ where x is the union of all atoms wich correspond to elements of W. The element x exist since B is complete. If $f(x)=f(x')$ then x and x' contain precizely the same set of atoms and $x=x'$.

(*i*) If a is an atom and $a\leqslant x$ or $a\leqslant y$ then it is evident that $a\leqslant x\cup y$ But supose that $a\leqslant x\cup y$. Than $a\bigcap(x\bigcup y)=(a\bigcap x)\bigcup(a\bigcap y)$. Since a is an atom $a\bigcap x=a$ or $a\bigcap x=0$ and $a\bigcap y=a$ or $a\bigcap y=0$. If the second alternative holds in both cases it follows thar $a=0$. Thus in all cases $a\leqslant x$ or $a\leqslant y$.

(*ii*) If $a\leqslant x\bigcap y$ then certainly $a\leqslant x$ and $a\leqslant y$. Since $x\bigcap y$ is the greatest lower band of x and y, it is the case that if $a\leqslant x$ and $a\leqslant y$ then $a\leqslant x\bigcap y$.

(*iii*) Supose that $a\in f(xy)$, i.e. $a\leqslant xy$. Than by ③ $a=cd$ where $c\leqslant x$ and $d\leqslant y$. Hence $a\in f(x)\odot f(y)$. Conversely, if $a\leqslant x$ and $b\leqslant y$ then $a\bigcup x=x$, $b\bigcup y=y$ and by II $xy=ab\bigcup ay\bigcup bx\bigcup xy$. Thus $ab\leqslant xy$.

It should be noted that the B. M. algebras of Boolean matricse do not satisfy ② or ④ and hence the B. M. algebras considered by Burlacu are not represented by the present theorem.

The autor is indebted to Eugen Burlacu and Sergiu Rudeanu for useful conversations about this subject. The paper was written while the author was a participant in the Exchange Program between the National Academy of Sciences and the Academy of the Romanian Socialist Republic.

REFERENCES

1. Eugen Burlacu, About a result of Moisil, Rev. Roumaine de Mathematiques Pures et Appliques, 21, No. 9, (1976), 1189-92.

2. Gr. C. Moisil, Asupra algebrei relațiilor binare, Comunicările Academiei R.P.R., No.12, (1958), 1251–1254.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

A COMMON FIXED POINT THEOREM FOR MULTIFUNCTIONS

BY

VALERIU POPA

The purpose of this note is to prove a common fixed point theorem for a sequence of multifunctions on a nonempty complete metric space (X, d). The method used is a combination of methods used in [1] and [2].

We denote by $CB(X)$ the set all nonempty closed bounded subsets of, X, and by H the Hausdorff-Pompeiu metric on $CB(X)$.

Let $A, B \in CB(X)$ and $k>1$. In what follows the following well-known fact will be used: Form each $a \in A$, there is a $b \in B$ such that

$$d(a, b) \leqslant k \cdot H(A, B).$$

Let: $T : X \to X$ a multifunction. Denote $F(T)=\{x \in X ; x \in T(x)\}$.

Lemma. Let $T_0, T : (X, d) \to CB(X)$ be two multifunctions. If (1) $H^2(T_0x, Ty) \leqslant k \cdot \max [d(x, T_0x) \cdot d(y, Ty) ; d(x, Ty) \cdot d(y, T_0x)]$ holds for all $x, y \in X$, $0 \leqslant k < 1$ and $F(T_0) \neq \varnothing$, then $F(T)=F(T_0)$.

Proof. If $u \in F(T_0)$, then by (1)

$$d^2(u, Tu) \leqslant H^2(T_0u, Tu) \leqslant$$

$$\leqslant k \cdot \max [d(u, T_0u) \cdot d(u, Tu) ; d(u, T_0u) \cdot d(u, Tu)]=0$$

which implies $d(u, Tu)=0$. Since T is closed, this shows that $u \in Tu$, which implies $F(T_0) \subset F(T)$. Analogous, $F(T) \subset F(T_0)$.

Theorem. Let (X, d) be a complete metric space, and $\{T_n\}_{n \in N}$ a sequence of multifunctions of X into $CB(X)$. If

(2) $H^2(T_1x, T_ny) \leqslant k \cdot \max [d(x, T_1x) \cdot d(y, T_ny) ; d(x, T_ny) \cdot d(y, T_1x)]$ holds forr all $x, y \in X$, $0 \leqslant k < 1$ and $n \geqslant 2$, then $\{T_n\}_{n \in N}$ has a common fixed points and $F(T_1)=F(T_n)$.

Proof. Chosse a real number q with

(3) $$1 < q < \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Let $x_0 \in X$ and $x_1 \in T_1 x_0$. Then there is an $x_2 \in T_2 x_1$ so that $d(x_1, x_2) \leqslant q \cdot H(T_1 x_0, T_2 x_1)$. Suppose $x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots$ could be chosen so that $x_{2n-1} \in T_1 x_{2n-2}$; $x_{2n} \in T_2 x_{2n-1}$ and

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q \cdot H(T_1 x_{2n-2}, T_2 x_{2n-1})$$

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \leqslant q \cdot H(T_1 x_{2n-2}, T_2 x_{2n-3}).$$

By (2) for $x = x_{2n-2}$ and $y = x_{2n-1}$ we hawe

$$d^2(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q^2 H^2(T_1 x_{2n-2}, T_2 x_{2n-1}) \leqslant q^2 k \cdot \max [d(x_{2n-2}, T_1 x_{2n-2}) \cdot$$

$$\cdot d(x_{2n-1}, T_2 x_{2n-1}); d(x_{2n-2}, T_2 x_{2n-1}) \cdot d(x_{2n-1}, T_1 x_{2n-2})] \leqslant \cdot q^2 k \cdot \max [d(x_{2n-2},$$

$$x_{2n-1}), \cdot d(x_{2n-1}, x_{2n});$$

$d(x_{2n-2}, x_{2n}) \cdot d(x_{2n-1}, x_{2n-1})] \leqslant q^2 k\, d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \cdot d(x_{2n-1}, x_{2n})$ which implies

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q^2 k \cdot d(x_{2n-2}, x_{2n-1}).$$

Analogous

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \leqslant q^2 k \cdot d(x_{2n-3}, x_{2n-2}).$$

Repeating the above argument, we obtained

$$d(x_n, x_{n-1}) \leqslant (q^2 k)^n \cdot d(x_0, x_1)$$

where $q^2 k < 1$ by (3). Then by routine calculation can show that x_n is Cauchy sequence and since X is complete, we have $\lim x_n = u$ for some $u \in X$. Now if $n \in N$, (2) implies

$$d^2(x_{2n}, T_1 u) \leqslant H^2(T_2 x_{2n-1}, T_1 u) \leqslant$$

$$\leqslant k \cdot \max [d(x_{2n-1}, T_2 x_{2n-1}) \cdot d(u, T_1 u); d(x_{2n-1}, T_1 u) \cdot d(u, T_2 x_{2n-1})] \leqslant$$

$$\leqslant k \cdot \max [d(x_{2n-1}, x_{2n}) \cdot d(u, T_1 u); d(x_{2n-1}, T_1 u) \cdot d(u, x_{2n})].$$

Hence by letting $n \to \infty$, we obtain $d(u, T_1 u) = 0$. Since $T_1 u$ is closed, this show that $u \in T_1 u$. By lemma, $u \in T_n u$ and $F(T_1) = F(T_n)$. This completes the proof of theorem.

REFERENCES

1. Toru Kita, A common fixed point theorem for multivalued mappings, Mathematica Japonicae, 22 (1977), 113-116.

2. Achari J., On a family of maps and fixed points, C.R. Acad. Bulgare des Sciences, 30, 2, (1977), 171—174.

3. Fisther B., Common fixed point and constant mappings on metric spaces, Mathemat. Seminar Notes, 5, (1977), 319—326.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

OF AN INEQUALITY OF T. POPOVICIU I

BY

JOSIP E. PEČARIĆ

1. In this paper we shall give a generalization POPOVICIU's inequality from [1] (see also [2, p. 38], and some analogous results.

THEOREM 1. Let $x_{ij}\,(i=1, \ldots, n\,;\ j=1, \ldots, m)$ be real numbers.

(a) For all sequences $a=(a_1, \ldots, a_n)$ and $b=(b_1, \ldots, b_m)$, monotonous in the same semse

$$F(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}a_ib_j\geqq 0 \tag{3}$$

if and only if

$$X_{r,s}\geqq 0 \quad (r=2, \ldots, n\,;\ s=2, \ldots, m)$$

$$X_{r,1}=0 \quad (r=1, \ldots, n),\ X_{1,s}=0 \quad (s=2, \ldots, m), \tag{4}$$

$$\text{where } X_{r,s}=\sum_{i=r}^{n}\sum_{j=s}^{m} x_{ij}.$$

If a and b are monotonous in the opposite sense, then (3) is reversed.

(b) For all nonnegative nonincreasing sequences a and b, $F(a, b)\geqq 0$ if and only if

$$X_{r,s}\geqq 0 \quad (r=1, \ldots, n\,;\ s=1, \ldots, m).$$

(c) For all nonnegative nonincreasing sequences a and for all nonnegative nondecreasing sequences b, $F(a, b)\geqq 0$ if and only if

$$\bar{X}_{r,,s}\geqq 0 \quad (r=1, \ldots, n\,;\ s=1, \ldots, m)$$

$$\text{where } \bar{X}_{r,s}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=s}^{m} x_{ij}.$$

PROOF. (a) (i) Let

$$a_i=0 \quad (i=1, \ldots, r-1) \quad a_i=1 \quad (i=r, \ldots, n)$$

and let $b_j=1$ $(i=1, \ldots, m)$ or $b_j=-1$ $(i=1, \ldots, m)$. Then, from (3), we get the condition $X_{r,1}=0$. By analogy, we get $X_{1,s}=0$. Now, let be

$$a_i=0 \ (i=1, \ldots, r-1) \quad a_i=1 \ (i=r, \ldots, n),$$

$$b_j=0 \ (j=1, \ldots, s-1) \quad b_j=1 \quad (j=s, \ldots, m).$$

Then from, (3), we get $X_{r,s} \geqq 0$. So the condition (4) is necessary for two non-decreasing sequences. By analogy we can prove it is necessary also for two nonincreasing sequences.

(*ii*) Let be

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} a_i.$$

Then

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{m} s_j b_j = b_1 \sum_{j=1}^{m} s_j + \sum_{s=2}^{m} \left(\sum_{j=s}^{m} s_j \right) (b_s - b_{s-1}).$$

Now, we write $x_i = \sum_{j=s}^{m} x_{ij}$. Then

$$\sum_{j=s}^{m} s_j = \sum_{j=s}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} a_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=s}^{m} x_{ij} \right) a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{r=2}^{n} \left(\sum_{i=r}^{n} x_i \right) (a_r - a_{r-1}) =$$

$$= a_1 X_{1,s} + \sum_{r=2}^{n} X_{r,s} (a_r - a_{r-1}).$$

For $s = 1$, we have

$$\sum_{j=1}^{m} s_j = a_1 X_{1,1} + \sum_{r=2}^{n} X_{r,1} (a_r - a_{r-1}).$$

So,

$$F(a, b) = a_1 b_1 X_{1,1} + b_1 \sum_{r=2}^{n} X_{r,1} (a_r - a_{r-1}) + a_1 \sum_{s=2}^{m} X_{1,s} (b_s - b_{s-1})$$

(5)

$$+ \sum_{r=2}^{n} \sum_{s=2}^{m} X_{r,s} (a_r - a_{1-s})(b_s - b_{s-1}).$$

Basing on (4), it rs evident that (3) holds.

By analogy, we can prowe

$$F(a, b) = a_n b_1 \bar{X}_{n,1} + b_1 \sum_{r=1}^{n-1} \bar{X}_{r,1} (a_r - a_{r+1}) + a_n \sum_{s=2}^{m} \bar{X}_{n,s} (b_s - b_{s-1}) +$$

(6)

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=2}^{m} \bar{X}_{r,s} (a_r - a_{r+1}) (b_s - b_{s-1}).$$

By using (5) and (6), analogously to the previous proof, we can easily prove (*b*) and (*c*).

Let be

$$D(a, b; p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i.$$

COROLLARY 1. (a) The inequality

$$D(a, b; p) \geqq 0 \tag{7}$$

holds for all sequences a and b, monotonous in the same sense, if and only if

$$\sum_{i=1}^{r} p_i \sum_{j=s}^{n} p_j \geqq 0 \quad (1 \leqq r < s \leqq n); \tag{8}$$

in the same way, the reverse inequality is satisfied in (7) for all sequences a and b, monotonous in the opposite sense.

(b) The inequality (7) holds for all sequences a and b, monotonous in the opposite sense, if and only if the reverse inequalities in (8) are valid; in the same way, the reverse inequality is satisfied in (7) for each sequence a and b monotonous in the same sense.

PROOF. By substitution

$$m=n, \quad x_{ij}=p_j\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - p_j\right) \ (i=j) \quad x_{ij}=-p_i p_j \quad (i \neq j), \tag{9}$$

from Theorem 1 (a), we get (a).

By analogy we get (b).

REMARKS: 1° Corollary 1 is proved in [3].

2° Let be $\sum_{i=1}^{n} p_i \geqq 0$. Then (8) is equivalent with $0 \leqq \sum_{i=1}^{k} p_i \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \quad (k=1, \ldots, n-1)$. By analogy, (8) (with the reverse inequalities) is equivalent with either $0 \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \leqq \sum_{i=1}^{k} p_i$ $(k=1, \ldots, n-1)$ or $0 \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \leqq \sum_{i=k}^{n} p_i$ $(k=2, \ldots, n)$ (see [3]).

3 Corollary 1(a) was proved by T. POPOVICIU [1].

Let functions $f: [a, b] \to R$ and $g: [c, d] \to R$ be continuous or of bounded variation, $p: [a, b] \times [c, d] \to R$ be an integrable function and

$$G(f,g)=\int_a^b \int_c^d p(x, y)\, f(x)\, g(y)\, dx\, dy.$$

Then

$$G(f, g)=f(a)\, g(c) P(a, c)+g(c) \int_a^b P(x, c)\, df(x)$$

$$+f(a) \int_c^d P(a, y)\, dg(y)+\int_a^b \int_c^d P(x, y)\, df(x)\, dg(y), \tag{10}$$

and

$$G(f, g)=f(b)\, g(c)\, \bar{P}(b, c)-g(c) \int_a^b \bar{P}(x, c)\, df(x)$$

$$+f(b) \int_c^d \bar{P}(b, y)\, dg(y)-\int_a^b \int_c^d \bar{P}(x, y)\, df(x)\, dg(y), \tag{11}$$

where

$$P(x,\ y)=\int_x^b\int_y^d p(x,\ y)\,dxdy \quad \text{and} \quad \bar{P}(x,\ y)=\int_a^x\int_y^d p(x,\ y)\,dxdy$$

$\forall x\in[a,\ b]$ and $\forall y\in[c,\ d]$.

By using (10) and (11) we can easily prove the following theorem :

THEOREM 2. (a) For all function f and g monotonous in the same sense, $G(f,\ g)\geqq 0$ if and only if

$$P(x,\ y)\geqq 0 \quad (\forall x\in[a,\ b]\ ;\ \forall y\in[c,\ d]),$$

$$P(x,\ c)=0 \quad (\forall x\in[a,\ b]), \qquad P(a,\ y)=0 \quad (\forall y\in[c,\ d]).$$

In a case f and g are monotonous in the opposite sense then $G(f,\ g)\leqq 0$.

(*b*) For all nonnegative nondecreasing functions f and g, $G(f,\ g)\geqq 0$ if and only if $P(x,\ y)\geqq 0$ $(\forall x\in[a,b]\ ;\ \forall y\in[c,\ d])$.

(*c*) For all nonnegative nonincreasing functions f and for all nonnegative nondecreasing functions g, $G(f,\ g)\geqq 0$, if and only if $\bar{P}(x,\ y)\geqq 0$ $(\forall x\in[a,\ b]\ ;\ \forall y\in[c,\ d])$.

2. We shall prove the following theorem :

THEOREM 3. Let a and b be nonnegative nondecreasing sequences. Then

$$a_n b_m \min_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} X_{r,s}\leqq F(a,\ b)\leqq a_n b_m \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} X_{r,s}. \tag{12}$$

If b is a nonnegative nondecreasing and a is nonnegative nonincreasing, then

$$a_1 b_m \min_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} \bar{X}_{r,s}\leqq F(a,\ b)\leqq a_1 b_m \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} \bar{X}_{r,s}. \tag{13}$$

PROOF. By using (5), we get

$$F(a,\ b)\geqq \min_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} X_{r,s}\,(a_1b_1+b_1\sum_{r=2}^{n}(a_r-a_{r-1})+a_1\sum_{s=2}^{n}(b_s-b_{s-1}))=$$

$$=\min_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} X_{r,s}\,(a_1b_1+b_1(a_n-a_1)+a_1(b_m-b_1)+(a_n-a_1)(b_m-b_1))=$$

$$=a_1b_1\min_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} X_{r,s}.$$

By analogy we get $F(a,\ b)\leqq a_1b_1\max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} X_{r,s}$. Proof for (13) is similar.

THEOREM 4. Let f and g be nonnegative nondecreasing functions. Then

$$f(b)\,g(d)\min_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}} P(x,\ y)\leqq G(f,g)\leqq f(b)\ g(d)\max_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}} P(x,\ y).$$

If f is nonnegative nonincreasing and g is nonnegative nondecreasing function, then

$$f(a)\ g(d) \min_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}} \bar{P}(x,\ y)\leqq G(f,\ g)\leqq f(a)\ g(d) \max_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}} \bar{P}(x,\ y).$$

REMARK : 4° Theorem 3 is *a* generalization of well-known ABEL's inequality (see [2, pp. 32, 33]).

3. **THEOREM 5.** Let a and b be monotonous sequences. Then

$$|F(a,\ b)|\leqq \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} |X_{r,s}|\,(|b_1|+|b_m-b_1|)\,(|a_1|+|a_n-a_1|) \tag{14}$$

and

$$|F(a,\ b)|\leqq \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} |\bar{X}_{r,s}|\,(|b_1|+|b_m-b_1|)\,(|a_n|+|a_n-a_1|). \tag{15}$$

PROOF. By using (5) we get

$$F(a,\ b)\leqq \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} |X_{r\,s}|\,(|a_1|\,|b_1|+|b_1|\,|a_n-a_1|+|a_1|\,|b_m-b_1|+$$

$$+|a_n-a_1||b_m-b_1|)$$

$$= \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} |X_{r\,s}|(|b_1|+|b_m-b_1|)(|a_1|+|a_n-a_1|).$$

Proof for (15) is similar.

COROLLARY 2. Let a and b be monotonous sequences such that $a_1a_n\geqq 0$ and $b_1b_m\geqq 0$. If $|a_m|\geqq|a_1|$, $|b_m|\geqq|b_1|$, then

$$|F(a,\ b)|\leqq|a_n||b_m| \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} |X_{r\,s}|$$

and if $|a_n|\geqq|a_1|$, $|b_m|\leqq|b_1|$, then

$$|F(a,\ b)|\leqq|a_n||b_1| \max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}} |X_{r\,s}|.$$

By analogy we can prove :

THEOREM 6. Let f and g be monotonous functions. Then

$$G(f,\ g)\leqq \max_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}} |P(x,\ y)|(|g(c)|+|g(d)-g(c)|)(|f(a)|+|f(b)-f(a)|)$$

and

$$G(f,\ g)= \max_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq s\leqq d}} |\bar{P}(x,\ y)|(|g(c)|+|g(d)-g(c)|)(|f(b)|+|f(b)-f(a)|).$$

COROLLARY 3. Let f and g be monotonous functions, such that

$f(a)f(b)\geqq 0$ and $g(c)g(d)\geqq 0$. If $|f(b)|\geqq|f(a)|$, $|g(d)|\geqq|g(c)|$, then

$$|G(f, g)|\leqq|f(b)||g(d)|\max_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}}|P(x, y)|,$$

and if $|f(b)|\geqq|f(a)|$, $|g(c)|\geqq|g(d)|$, then

$$|G(f, g)|\quad|f(b)||g(c)|\max_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}}|\bar{P}(x, y)|.$$

4. **THEOREM 7.** Let a and b be monotonous sequences.

(a) If $X_{r1}=0$ $(r=1, \ldots, n)$, $X_{1s}=0$ $(s=2, \ldots, m)$, then

$$|F(a, b)|\leqq|a_n-a_1||b_m-b_1|\max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}}|X_{rs}|.$$

(b) If $\bar{X}_{r1}=0$ $(r=1, \ldots, n)$, $\bar{X}_{ns}=0$ $(s=2, \ldots, m)$, then

$$|F(a, b)|\leqq|a_n-a_1||b_m-b_1|\max_{\substack{1\leqq r\leqq n\\ 1\leqq s\leqq m}}|\bar{X}_{rs}|.$$

THEOREM 8. Let $a=(a_1, \ldots, a_n)$ and $b=(b_1, \ldots, b_n)$ are monotonous sequences, and let $p=(p_1, \ldots, p_n)$ is a positive sequence. Then

$$|D(a, b; p)|\leqq|a_n-a_1||b_n-b_1|\max_{1\leqq k\leqq n-1}\sum_{i=1}^{k}p_i\sum_{i=k+1}^{n}p_i. \tag{16}$$

PROOF. By using (8), from Theorem 7 (a), we get Theorem 8.

COROLLARY 4. Let a and b be real sequences, such that

$$a\leqq a_i\leqq A \text{ and } b\leqq b_i\leqq B \quad (i=1, \ldots, n).$$

Then

$$|D(a, b, 1)|\leqq(A-a)(B-b)\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{17}$$

PROOF. Let $\bar{a}=(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ be the rearrangement of a in increasing order, and $\underline{a}=(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ be the rearrangement of a in decreasing order and define $\bar{b}$ and $\underline{b}$ analogously. Then (see [4, p. 261]):

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i\underline{b}_i\leqq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqq\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i\bar{b}_i,$$

i. e.

$$D(\bar{a}, \underline{b}, 1)\leqq D(a, b, 1)\leqq D(\bar{a}, \bar{b}, 1). \tag{18}$$

Since, from (16),

$$|D(\bar{a}, \bar{b}, 1)|, |D(\bar{a}, \underline{b}, 1)|\leqq(A-a)(B-b)\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

by using (18), we get (17).

REMARKS : 5° Corollary 4 was proved by M. BIERNACKI, H. PIDEK and C. RYLL-NARDZEWSKI [5].

6° It is evidently that $\max\limits_{1\leqq k\leqq n-1} \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \sum\limits_{i=k+1}^{n} p_i \leqq \frac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right)^2$.

THEOREM 9. Let be $0<a_1\leqq \ldots \leqq a_n$ and $p_i\geqq 0$ $(i=1, \ldots, n)$. Then

$$A_n(a;p)A_n\left(\frac{1}{a};p\right)\leqq \frac{(a_n-a_1)^2}{a_n a_1}\max_{1\leqq k\leqq n-1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \sum\limits_{i=k+1}^{n} p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right)^2}+1,$$

where $A_n(a;p)=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$.

PROOF. By substitutions : $a_k=a_k$, $b_k=\frac{1}{a_k}$ $(k=1, \ldots, n)$, from Theorem 8, we get Theorem 9.

COROLLARY 5. If a is *a* sequence of real numbers with

$$0<m\leqq a_k\leqq M \qquad (k=1, \ldots, n),$$

then

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqq \frac{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor M+\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil m\right)\left(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor M+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil m\right)}{Mm}.$$

REMARK : 7° Corollary 5 was proved by A. LUPAŞ [6].

THEOREM 10. Let f and g be monotonous functions.

(*a*) If $P(x, c)=0$ $(\forall x\in[a, b])$, $P(a, y)=0$ $(\forall y\in[c, d])$, then

$$|G(f, g)|\leqq |g(d)-g(c)||f(b)-f(a)| \max_{\substack{a\leqq x\leqq b\\ c\leqq y\leqq d}} |P(x, y)|.$$

(*b*) If $\bar{P}(x, c)=0$ $(\forall x\in[a, b])$, $\bar{P}(b, y)=0$ $(\forall y\in[c, d])$, then

$$|G(f, g)|\leqq |g(d)-g(c)||f(b)-f(a)| \max_{\substack{a\leqq x\leqq y\\ c\leqq y\leqq d}} |P(x, y)|.$$

REFERENCES

1. T. Popoviciu: On an inequality (Romanian). Gaz. Mat. Fiz. A 8 (64) (1959), 451—461.
2. D. S. Mitrinović (In cooperation with P.M. VASIĆ): Analytic Inequalities. Berlin-Heidelberg-NewYork, 1970.
3. J. E. Pečarić: On the Čebyšev inequality. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No — No ( ),
4. G.H. Hardy, Y. E. Littlewood and G. Polya: Inequalities, Cambridge, 1952.
5. M. Biernacki, H. Pidek and C. Ryll—Nardzewski: Sur une inegalité entre des integrales définies. Ann. Univ. Mariae. Curie—Sklodowska A 4 (1950), 1—4.
6. A. Lupas: A remark on the Schweitzer and Kantorovich inequalities Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 381— No 409 (1972), 13—15.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

VARIETĂŢI NEOLONOME V_3^2 ECHIVALENTE CU PLANUL ELIPTIC

DE

PAVEL DRĂGILĂ

1. Se ştie că bazele Geometriei diferenţiale moderne au fost puse cu un veac şi jumătate înainte de K. Gauss, care a arătat că suprafeţele din spaţiul euclidean cu 3 dimensiuni E^3 pot fi definite, atît prin ecuaţia lor implicită

$$F(x,\ y,\ z)=0, \tag{1}$$

cît şi prin reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x&=f(u,\ v),\\ y&=g(u,\ v),\\ z&=h(u,\ v). \end{aligned} \tag{2}$$

Funcţiile f, g, h sînt continue şi mărginite, cel puţin în interiorul unui domeniu D al planului Ouv, şi trebuie alese în aşa fel ca, făcînd înlocuirile (2) în egalitatea (1), să obţinem o identitate.

În cazul reprezentării parametrice (2) relaţiilor

$$u=\text{const}, \qquad v=\text{const}.$$

le corespund două familii de curbe pe suprafaţă, care formează împreună o reţea. Aceasta înseamnă că, printr-un punct M al suprafeţei, trece o singură curbă $u=u_0$ din familia întîia şi o singură curbă $v=v_0$ din familia a doua. De aici rezultă că poziţia punctului M pe suprafaţă este determinată, la fel ca şi în cazul planului, de valorile u_0, v_0 ale parametrilor u, v ,care au fost denumite mai tîrziu coordonate curbilinii.

Dacă se face o transformare oarecare de coordonate

$$x'=\varphi(x,\ y,\ z), \qquad y'=\psi(x,\ y,\ z), \qquad z'=\varkappa(x,\ y,\ z),$$

se obţine o altă suprafaţă. Se ştie însă că există şi unele transformări particulare prin care se obţine aceeaşi suprafaţă.

Dacă facem o transformare a coordonatelor curburilinii

$$u=\xi(u',\ v'), \qquad v=\eta(u',\ v'),$$

suprafaţă rămîne aceeaşi, fiind schimbate numai curbelere ţelei pe suprafaţa.

Rezultatul cel mai important, obținut de Gauss, este acela privitor la posibilitatea studierii proprietăților diferențiale ale suprafețelor prin ambele metode, pe de o parte diferențiind egalitatea (1)

$$F_x\,dxy+F_y dy+F_z dz=0, \tag{3}$$

iar pe de altă parte diferențiind relațiile (2)

$$\begin{aligned} dx&=f_u du+f_v dv,\\ dy&=g_u du+g_v dv,\\ dz&=h_u du+h_v dv. \end{aligned} \tag{4}$$

Cu ajutorul diferențialelor de ordinul întîi (4) și a diferențialelor de ordinul doi, Gauss a dedus prima formă diferențială fundamentală

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

a doua formă diferențială fundamentală

$$d\varnothing=Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2,$$

și cu ajutorul acestora a obținut curbura totală K și curbura medie H a unei suprafețe [1].

Metoda reprezentărilor parametrice, dovedindu-se foarte rodnică, a fost adoptată mai tîrziu de toți matematicienii, care folosindu-se și de noțiunile mai recente de grup de transformări, invarianți, tensori, transport paralel, au ajuns să dezvolte teoria suprafețelor și a rețelelor în spațiul proiectiv P^3 și în spațiul afin S^3, apoi teoria spațiilor riemanniene și a spațiilor cu conexiuni.

2. Prin aplicarea calculului diferențial la suprafețele reprezentate sub formă parametrică, adică prin folosirea formelor diferențiale (4), pe care le vom numi forme diferențiale explicite, s-a ajuns mai tîrziu la metoda reperului mobil, care a fost întrodusă de G. Darboux și apoi perfecționată și generalizată de E. Cartan. În mai multe din lucrările sale Cartan a insistat să dovedească aplicabilitatea acestei metode în toate domeniile Geometriei.

Pe de altă parte, prin aplicarea calculului diferențial la suprafețele reprezentate prin ecuația implicită (1), adică prin folosirea formelor diferențiale (3), pe care le numim implice, A. Voss a ajuns la studiul ecuațiilor Pfaff

$$P(x,\ y,\ z)dx+Q(x,\ y,\ z)dy+R(x,\ y,\ z)dz=0 \tag{5}$$

care nu sînt complet integrabile, și mai tîrziu la definiția suprafețelor neolonome [2]. Continuînd aceeași direcție prof. G. Vrănceanu a descoperit spațiile neolonome și a întrodus pentru studiul acestor spații metoda congruențelor de curbe [3], [4]. Mai tîrziu a arătat că această metodă a congruențelor se poate extinde deasemenea și la spațiile cu conexiuni [5].

Din numeroasele studii, ce au fost făcute în legătură cu proprietățile diferențiale ale suprafețelor, s-a ajuns la concluzia că pentru definirea elementelor diferențiale ale suprafeței se pot folosi mai multe feluri de reprezentări, cu diferite sisteme de coordonate, și că este posibil să se deducă o ecuație, sau un sistem de ecuații, dintr-o altă ecuație, sau un alt sistem de ecuații, cu ajutorul transformărilor de coordonate sau a schimbărilor parametrilor. Așa de pildă se știe că, dacă suprafața este dată printr-o ecuație implicită (1,) ecuația planului tangent la suprafață se scrie

$$(X-x)F_x+(Y-y)F_y+(Z-z)F=0. \tag{6}$$

iar dacă suprafaţa este definită prin reprezentarea parametrică (2), ecuaţia planului tangent al suprafeţei va fi

$$|P-rr_u r_v|=0, \tag{7}$$

în care termenul din stînga egalităţii reprezintă un determinant.

Făcînd înlocuirile (2) în relaţia (6), se ştie că se obţine relaţia (7).

Deasemenea se mai ştie că reţelele conjugate de pe o suprafaţă pot fi definite, cu ajutorul coordonatelor carteziene x, y, z, printr-o ecuaţie Laplace

$$r_{uv}+ar_u+br_v=0, \tag{8}$$

aceleaşi reţele mai putînd fi definite şi cu ajutorul coordonatelor omogene x^1, x^2, x^3, x^0, care sînt legate de coordonatele cartesiene prin relaţiile

$$x^1=\nu x, \qquad x^2=\nu y, \qquad x^3=\nu z, \qquad x^0=\nu, \tag{9}$$

printr-o altă ecuaţie Laplace

$$r_{uv}+a^x r_u+b^x r_v+c^x r=0 \tag{10}$$

De la ecuaţia (10) se poate ajunge la ecuaţia (8) făcînd înlocuirile (9).

3. Studiul sistematic al proprietăţilor diferenţiale ale varietăţilor neolonome a fost făcută după publicarea lucrării [4] asupra spaţiilor neolonome. Începînd cu anul 1929, au fost publicate un număr important de lucrări, la noi în ţară cît şi peste hotare. În cele dintîi lucrări au fost studiate varietăţile neolonome definite printr-o ecuaţie Pfaff (5), sau printr-un sistem de ecuaţii Pfaff

$$\begin{aligned} &A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,\\ &A_1dx+B_1dy+C_1dz=d\sigma^1,\\ &A_2dx+B_2dy+C_2dz=d\sigma^2, \end{aligned} \tag{11}$$

care corespunde metodei congruenţelor de linii din spaţiile neolonome [4], [5].

Ceva mai tîrziu, începînd cu S.S. Biuşghens în URSS şi prof. G. Gheorghiev la noi, au fost publicate numeroase lucrări, [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], în legătură cu varietăţile neolonome definite prin metoda reperului mobil $MI_1I_2I_3$ euclidean. Varietăţile neolonome, definite în acest mod, se reprezintă printr-un sistem de 3 ecuaţii Pfaff de forma

$$\begin{aligned} dx&=w_1^1du+w_2^1dv,\\ dy&=w_1^2du+w_2^2dv,\\ dz&=w_1^3du+w_2^3dv, \end{aligned} \tag{12}$$

între care cel puţin unele nu sînt complet integrabile.

Cam în aceeaşi epocă, urmărindu-se să se găsească proprietăţi diferenţiale proiective, asemănătoare cu cele ale suprafeţelor, au fost studiate, de un număr mai mic de matematicieni, varietăţi neolonome definite prin metoda reperului

mobil $A_0A_1A_2A_3$ proiectiv [10], [11], [12]. Varietăţile neolonome, care au fost definite pe această cale, se reprezintă printr-un sistem de 4 ecuaţii Pfaff

$$\begin{aligned} dx^1 &= w_1^1 du + w_2^1 dv, \\ dx^2 &= w_1^2 du + w_2^2 dv, \\ dx^3 &= w_1^2 du + w_2^3 dv, \\ dx^0 &= w_1^0 du + w_2^0 dv, \end{aligned} \tag{13}$$

dintre care iarăşi cel puţin o parte nu sînt integrabile.

Trebuie să subliniem faptul foarte important că, spre deosebire de cazul suprafeţelor olonome, în cazul varietăţilor neolonome putem anunţa următoarea teoremă fundamentală :

O varietate neolonomă, care a fost definită prin una din metodele de mai sus, nu poate fi definită şi nici studiată prin celelalte metode.

În consecinţă varietăţile neolonome pot fi împărţite, în mod natural, în următoarele clase :

Varietăţi de clasa A, cele definite printr-o ecuaţie (5) sau printr-un sistem de ecuaţii (11).

Varietăţi de clasa B, cele definite printr-un sistem de ecuaţii (12).

Varietăţi de clasa C, cele definite printr-un sistem de ecuaţii (13).

Aceste clase de varietăţi se pot deosebi între ele, pe de o parte prin consideraţii analitice, iar pe de altă parte prin proprietăţile lor geometrice.

Pentru a arăta deosebirile de natură analitică, care se prezintă la aceste clase, este deajuns să demonstrăm că nu există nici o schimbare de variabile, prin care să putem deduce o ecuaţie de forma (5), sau un sistem de ecuaţii de forma (11), (12) sau (13), dintr-un sistem de ecuaţii de altă formă. După cum se vede, problema revine în fond la studiul transformărilor sistemelor de ecuaţii Pfaff, ce nu sînt complet integrabile.

Pentru uşurarea înţelegerii, vom începe mai întîi cu un exemplu particular mai simplu.

Presupunem că se dă în spaţiul E^3 o varietate neolonomă, definită prin ecuaţia Pfaff

$$yxdx + xzdy + ydz = 0. \tag{14}$$

Ne propunem să îmcercăm să reprezentăm această varietate neolonomă printr-un sistem de ecuaţii Pfaff de forma (12), pe care le scriem

$$\begin{aligned} dx &= p_1 du + p_2 dv, \\ dy &= q_1 du + q_2 dv, \\ dz &= r_1 du + r_2 dv, \end{aligned} \tag{15}$$

Făcînd înlocuirile (15) în egalitatea (14), ajungem la sistemul următor

$$\begin{aligned} yzp_1 + xzq_1 + yr_1 &= 0, \\ yxp_2 + xzq_2 + yr_2 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru ca sistemul (16) să fie satisfăcut, ar trebui să putem găsi pe u şi v ca funcţii de variabilele x, y, z. Ori, este uşor de văzut că în cazul varietăţilor neolonome aceasta nu este posibil.

Putem da acum şi demonstraţiile generale.

Fie dată o varietate neolonomă, definită printr-un sistem Pfaff de forma (13), la care cel puțin una dintre ecuații nu este complet integrabilă, de exemplu ecuația întîia. Dintre celelalte ecuații ale sistemului alegem una, care este complet integrabilă, de exemplu ultima ecuație. Putem reprezenta aceste condiții cu ajutorul derivatei exterioare astfel

$$D\,(dx^1)\neq 0,$$

$$D\,(dx^0)=0. \tag{17}$$

Ținînd seama de egalitățile (17), obținem prin integrare

$$\int dx^1 = f\,(w_1^1 du + w_2^1 dv),$$

în care prin simbolul $\oint$ reprezentăm integrala unei diferențiale totale neexacte, și

$$dx^0 = \int (w_1^0 du + w_2^0 dv) = \nu\,(u, v)$$

Vom încerca să reprezentăm acum, o varietate neolonomă de acest fel, cu ajutorul unui sistem de ecuații de forma (12). Pentru aceasta trebuie să deducem mai întîi expresiile coordonatelor x, y, z, și pe urmă ale diferențialelor dx, dy, dz. Ținînd seama de relația

$$x = \frac{x^1}{x^0}$$

vom obține

$$dx = \frac{dx^1}{x^0} - \frac{dx^0}{(x^0)^2}\,x^1,$$

adică

$$dx = \frac{w_1^1\,du + w_2^1\,dv}{\nu} - \frac{w_1^0\,du + w_2^0\,dv}{\nu^2} \oint (w_1^1 du + w_2^1 dv). \tag{18}$$

Din ultima egalitate (18) se vede clar că expresia lui dx este o formă diferențială neanalitică. De aici putem trage concluzia că o varietate neolonomă, care a fost reprezentată cu ajutorul unui sistem de forma (13) nu mai poate fi reprezentată cu ajutorul unui sistem de forma (12).

Dacă se dă o varietate neolonomă, reprezentată printr-un sistem de forma (13), putem să demonstrăm de asemenea că nu e reprezentabilă cu ajutorul unui sistem de forma (11), și nici printr-o ecuație de forma (5). Pentru aceasta ar trebui să găsim expresiile diferențialelor dx, dy, dz, și pe urmă ale coordonatelor x, y, z,. Ori, ținînd seama că cel puțin una dintre ecuațiile (13) nu este complect integrabilă, urmează că cel puțin una din diferențialele dx, dy, dz, se va exprima cu o formă diferențială neanalitică, ca și în cazul dinainte.

4. Aceste trei clase de varietăți neolonome se pot deosebi între ele și prin proprietățile lor geometrice. Pentru a demonstra aceaste, este deajuns să considerăm numai vecinătatea diferențială de ordinul întîi. Cu ajutorul acestei vecinătăți putem să definim, în cazul cînd există, metrica varietății, și să găsim corespondențele prin plane tangente omoloage paralele.

În cazul varietăților de clasa A, din sistemul (11) putem scoate expresiile lui dx, dy, dz, și făcînd apoi înlocuirile în relația :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{19}$$

obținem metrica

$$ds^2 = E_{11}\,(d\sigma^1)^2 + 2E_{12} d\sigma^1 d\sigma^2 + E_{22}\,(d\sigma^2)^2, \tag{20}$$

în care expresiile E_{11}, E_{12}, E_{22} depind de coordonatele x, y, z.

Urmează acum să demonstrăm că varietăţile din această clasă nu pot fi în corespondenţă, prin plane tangente omoloage paralele, cu nici o suprafaţă.

Se ştie că varietăţile, definite printr-un sistem de ecuaţii de forma (11) sînt neolonome, numai în cazul în care este satisfăcută inegalitatea

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}C-\frac{\partial}{\partial z}B\right)+B\left(\frac{\partial}{\partial z}A-\frac{\partial}{\partial x}C\right)+C\left(\frac{\partial}{\partial x}B-\frac{\partial}{\partial y}A\right)\neq 0 \qquad (21)$$

Pe de altă parte se ştie că, condiţia ca o astfel de varietate să se corespundă prin plane tangente paralele cu o suprafaţă, definită prin ecuaţia (1), se exprimă prin relaţiile

$$F_x=1A, \qquad F_y=1B, \qquad F=1C \qquad (22)$$

Este uşor de arătat că relaţia (21) nu este compatibilă cu sistemul de relaţii (22). Dacă în egalitatea (21), în loc de A, B, C, vom scrie $1A$, $1B$, $1C$, vom obţine tot o inegalitate, iar dacă vom scrie derivatele parţiale F_x, F_y, F, vom observa că termenul din stînga este identic nul.

Varietăţile de clasa B, care, după cum am văzut, sînt reprezentate prin sisteme de forma (12, au cele mai multe proprietăţi comune cu suprafeţele. Făcînd înlocuirile (12) în egalitatea (19), obţinem metrica

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

care, după cum se vede, coincide cu cea a suprafeţelor. De aici se poate trage concluzia, că fiecare varietate din această clasă este aplicabilă, cel puţin pe o suprafaţă.

În privinţa corespondenţei prin plane tangente omoloage paralele, varietăţile din această clasă sînt de două feluri:

a) unele care se corespund prin paralelism cu suprafeţe,

b) altele care se corespund prin paralelism numai cu varietăţi neolonome, tot de clasa B.

Vom arăta acum în ce mod se pot obţine aceste două tipuri de varietăţi.

Pornind de la o suprafaţă oarecare, reprezentată prin sistemul (4), găsim o familie de varietăţi neolonome

$$\begin{aligned} dx&=\lambda f_u du+\mu f_v dv,\\ dy&=\lambda g_u du+\mu\, g_v dv, \qquad (\lambda=\text{const.} \quad \mu=\text{const.})\\ dz&=\lambda h_u du+\mu h_v dv, \end{aligned}$$

care se corespund prin plane tangente paralele cu aceste suprafeţe (4), şi o altă familie de varietăţi neolonome

$$\begin{aligned} dx&=\lambda f_u du+f_v dv,\\ dy&=g_u du+g_v dv, \qquad (\lambda=\text{const.})\\ dz&=h_u du+h_v dv, \end{aligned}$$

care nu se corespund prin plane tangente paralele cu nici o suprafaţă, dar se corespund cu varietăţile

$$\begin{aligned} dx&=\lambda f_u du+\mu f_v dv,\\ dy&=g_u du+\mu g_v dv,\\ dz&=h_u du+\mu h_v dv. \end{aligned}$$

Varietăţile de clasa C au cele mai puţine proprietăţi comune cu suprafeţele, cît şi cu varietăţile de clasa B. Cu ajutorul vecinătăţii diferenţiale de ordinul întîi, la aceste varietăţi, nu se pot determina elementele geometrice corespunzătoare varietăţilor din clasa B. Dacă am încerca să deducem o metrică riemanniană, ar trebui să găsim, cu ajutorul relaţiilor (13), diferenţialele dx, dy, dz, dar am văzut deja că, cel puţin una dintre ele, se exprimă cu o formă diferenţială neanalitică. Tot din aceeaşi cauză, la aceste varietăţi nu se poate defini corespondenţa prin plane tangente paralele.

5. Deosebirile de natură analitică şi geometrică, care există între aceste clase de varietăţi, nu au fost observate pînă în prezent. Din această cauză s-au făcut multe greşeli, în zeci de lucrări, mai cu seamă în privinţa interpretărilor geometrice, ce s-au dat, şi a concluziilor care s-au tras. În continuare vom menţiona doar o parte din aceste greşeli.

Mai mulţi autori, care au lucrat cu metoda reperului mobil euclidean, credeau că au regăsit „sfera neolonomă" şi „planul neolonom", care au fost studiate iniţial în articolul [7], ca varietăţi de clasa A. De fapt autorii aceştia au descoperit, fără să-şi dea seama, o altă „sferă neolonomă" şi un alt „plan neolonom", care sînt varietăţi de clasa B şi în consecinţă au proprietăţi geometrice cu totul diferite de cele din clasa A. Alţi autori dimpotrivă, lucrînd cu metoda congruenţelor, credeau că au obţinut pe altă cale unele teoreme şi formule, care au fost găsite anterior, de cei care au aplicat metoda reperului mobil euclidean.

În mai multe lucrări s-au făcut confuzii între „nor×malele proiective" ale lui E. Bortolotti şi „transversalele proiective" ale lui A. Pantazi.

Amintim numai, fără să dăm demonstraţiile, că normalele lui Bortolotti sînt două drepte ataşate unei varietăţi neolonome de clasa A [9], în timp ce transversalele lui Pantazi sînt două drepte ataşate unei varietăţi neolonome de clasa C [11].

În alte cîteva lucrări s-au făcut încercări nereuşite, de a identifica varietăţile neolonome de tip Ţiţeica-Wilczynski de clasa C, care au fost studiate iniţial, cu cele de clasa A, care au fost studiate mai tîrziu.

6. Rostul acestei lucrări nu este acela, de a face analiza amănunţită a acestor greşeli, ci de a stabili, după cum arată şi titlul lucrării, dacă există varietăţi neolonome V_3^2, care să fie echivalente cu planul eliptic, şi, dacă este posibil, să găsim reprezentarea acestor varietăţi.

După cum ştim, planul eliptic este caracterizat prin metrica, care poate fi scrisă sub forma

$$ds^2 = \frac{1}{1-u^2}\,du^2 + u^2 dv^2. \tag{23}$$

Prima condiţie, pe care trebuie să o îndeplinească aceste varietăţi neolonome, este aceea de a avea aceeaşi metrică (23). Putem deci enunţa următoarea teoremă:

„Varietăţi neolonome V_3^2 echivalente cu planul eliptic, pot fi numai unele varietăţi din clasa B".

Urmează acum să găsim o reprezentare a acestor varietăţi, şi apoi să stabilim gradul lor de generalitate. Pentru aceasta pornim de la suprafeţele

care au metrica (23). Între aceste suprafețe putem alege una oarecare, de pildă sfera, care este reprezentată prin sistemul

$$dx = \text{cosv. } du - \text{usinv. } dv,$$
$$dy = \text{sinv. } du + \text{ucosv. } dv, \tag{24}$$
$$dz = -\frac{u}{\sqrt{1-u}}\, du.$$

Cu ajutorul sistemului (24) putem forma cele două sisteme

$$dx = \lambda \text{ cosv. } du - \text{usinv. } dv,$$
$$dy = \lambda \text{ sinv. } du + \text{cosv. } dv, \tag{25}$$
$$dz = \sqrt{\frac{\lambda^2 u - \lambda^2 + 1}{1-u^2}}\, du,$$

și

$$dx = \lambda \text{ cosv. } du + \text{usinv. } dv,$$
$$dy = \lambda \text{ sinv. } du - \text{ucosv. } dv,$$
$$dz = \sqrt{\frac{\lambda^2 u - \lambda^2 + 1}{1-u^2}}\, du,$$

care reprezintă două familii de varietăți neolonome, ce depind de un parametru, care au aceeași metrică cu sfera (24). În consecință, pe aceste varietăți se pot determina, ca și pe sferă, liniile geodezice, care sînt analitice. De aici urmează că se poate calcula, ca și pe sferă, distanța dintre două puncte și unghiul a două drepte.

Între varietățiile (25) există una particulară

$$dx = \text{cosv. } du + \text{usinv. } dv,$$
$$dy = \text{sinv. } du - \text{ucosv. } dv,$$
$$dz = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, du.$$

Această varietate se bucură de următoarele proprietăți deosebite:

1) se corespunde prin plane tangente omoloage paralele cu sfera (24),
2) are curbura totală constantă

$$K = -1.$$

BIBLIOGRAFIE

1. K. Gauss: Disquisitiones generales circa superficies curvas. 1828,
2. A. Voss: Geometrische interpretation der Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Math. Ann. 16, 1880, 556—55
3. Gh. Vrănceanu: Sur les espaces non holonomes. C.R. Acad. Paris, 183 1962, 852—855.
4. * * * Les espaces nonholonomes. Mém. Sc. Math. 1936,
5. * * * Sur les espaces à connexion affine et projective. Bull. Math. Soc. Roum. Sc. 44, 1942, 85—139,
6. D. Sintzov: Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pffschen Gleichung. Math. Ann. 101, 1929, 261 — 271

7. Gr. Moisil: Sur les propriétés affines et conformes des variétés nonholonomes. Bul. Fac. Şt. Cernăuţi, IV. 1930, 15—21,
8. E. Bompiani Sulle varieta anolonome. Rend. Accad. Naz. Lincei, 1938, 37—52
9. E. Bortolotti: Duale Verwandschaften anholonome Flächen im projektiven und in affinen Räume. Jahrb. Deut. Math. Ver. 51, 1941, 151—163
10. T. Mihăilescu: Sur les variétés non holonomes de l' S_3 projektif. Bull. Math. Soc. Roum. Sc. 44, 1942, 35—53,
11. * * * Varietăţi neolonome de tip Ţiţeica—Wilczynski. Studii Cerc. Mat. VI, 1955, 175—192,
12. A. Pantazi: Sur la deformation projektive des surfaces non holonomes de l'espace S_3. Bull. Math. Soc. Roum. Sc. 45, 1943, 39—4
13. S.S. Biuşghens: Ghcometria vektornevo polia. Dokl. Akad. Nauk. 48, 1945, 163—166, 403—404
14. Gh. Gheorghiev Despre geometria intrinsecă a unui cîmp de vectori unitari. Studii Cerc. Şt. Iaşi. II, 1951, 21—31
15. * * * Cîteva probleme geometrice legate de un cîmp de vectori unitari. Bul. Şt. Acad. R.P.R. VI, 1954, 101—123
16. R. Miron: Cîteva probleme din geometria unui cîmp de vectori unitari. Studii Cerc. St. Iaşi, VI, 1955, 173—183,
17. * * * — Asupra sferei neolonome şi planului neolonom. An Şt. Univ. Iaşi, I, 1955, 43—52,
18. * * * — Observaţii asupra unor formule din geometria varietăţilor neolonome E_3. Bul Inst. Polith. Iaşi, III, 1957, 19—24
19. I. Vaisman: Varietăţi neolonome riglate din S_3 euclidean. Studii Cerc. Şt. Iaşi XI, 1960. 161—173,
20. * * * — Asupra reţelelor de pe o varietate neolonomă din S_3 euclidean. Studii Cerc. Şt Iaşi, XII, 1961, 135—157,
21. I. Popa, Gh. Gheorghiev: Sur une variété unidimensionnelle non holonome de A. Myller. An Şt. Univ. Iaşi, VI, 1960, 59—75,
22. * * * — Couples de variétés non-holonomes de l''espace projectif à trois dimensions C.R. Acad. Paris, 253, 1961, 772—773, 933—934,
23. Gh. Gheorghiev: Differenţialnaia gheometria mnogobrazii konusov v trehmernov pronstvanstve. An. Şt. Univ. Iaşi, VIII, 1962, 353—368.
24. V. Cruceanu: Serii de direcţii înfăşurătoare în varietăţi neolonome. Studii Cerc. Şt. Iaşi, XI, 1960, 343—354,
25. * * * — Asupra geometriei centro-afine a varietăţilor neolonome V An. Şt. Univ. Iaşi, XI, 1965, 453—464
26. Gh. Th. Gheorghiu: Asupra varietăţilor neolonome. Lucr. Şt. Inst. Ped. Timişoara, 1962, 59—87,
27. * * * — Asupra varietăţilor neolonome Ţiţeica. Studia Univ. Babeş—Bolyai, 1962, 45—60.
28. V. Obădeanu: —Asupra unor varietăţi neolonome. Lucr. Şt. Inst. Ped. Timişoara 1961, 131—138,
29. * * * — Asupra varietăţilor neolonome pătratice. An. Univ. Timişoara 1963, 207—216.
30. I. Popescu; M. Graf· Asupra varietăţilor neolonome Ţiţeica. Lucr. Inst. Ped Timişoara, 1962, 167—174,
31. I. Popescu: Varietăţi de rotaţie neolonome. An. Univ. Timişoara, 1963, 257—268,
32. I. Popescu; D. Opriş: Asupra sferelor afine neolonome. An. Univ. Timişoara 1966, 266—273.

VARIÉTÉS NON HOLONOMES V_3^2 ÉQUIVALENTES AVEC LE PLAN ELLIPTIQUE.

RÉSUMÉ

Les variétés non holonomes de l'espace à trois dimensions se partagent en les trois classes A, B, C, qui sont caractérisées par les systèmes (11), (12), (13). Les variétés de ces classes se distinguent par leurs propriétés analytiques et géométriques.

La métrique elliptique (23) existe seulement sur certains variétés de la classe B. Partant de la sphère, définie par le système (24), on peut déterminer deux familles de variétés non holonomes dependant d'un paramètre, quioint la même métrique que la sphère.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

FUNCŢII H-OLOMORFE PE ALGEBRE POLINOMIALE CU RADICAL

P.N. IZVERCIAN şi C. FINSTER

1. Fie $\mathbb{R}[\lambda]$ algebra polinoamelor de o variabilă peste $\mathbb{R}$ şi $\varphi \in \mathbb{R}[\lambda]$ astfel încît grad $\varphi \neq 0$. Atunci polinomul φ generează o algebră liniară H_φ asociativă, comutativă cu element unitate, [1].

Algebra H_φ poate fi studiată din două puncte de vedere :

1. Dacă $\varphi \in \mathbb{R}[\lambda]$, $\varphi = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, fie (φ) idealul bilateral generat de φ Atunci H_φ este algebra factor $H_\varphi = \mathbb{R}[\lambda]/(\varphi)$ iar clasele elementelor $1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}$, în H_φ, constituie o bază peste $\mathbb{R}$ şi deci $\dim_{\mathbb{R}} H_\varphi = n$.

2. Dacă grad $\varphi = n$, $n \geqslant 1$, atunci H_φ se defineşte ca fiind algebra generată de un element $e \in H_\varphi$ al cărui polinom minimal este φ iar elementele $1, e, \ldots, e^{n-1}$ constituie o bază pentru H_φ şi prin urmare $\dim_{\mathbb{R}} H_\varphi = n$.

În fiecare caz, H_φ, considerată ca o algebră abstractă are aceleaşi proprietăţi.

Definiţia 1.1. Algebra H_φ se numeşte algebră polinomială generată de polinomul $\varphi \in \mathbb{R}[\lambda]$.

2. Fie H_φ o algebră polinomială generată de polinomul $\varphi = (\lambda - \lambda_0)^n$, $n \in N$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Atunci H_φ este o algebră cu radical propriu iar elementele propriu nilpotente corespund factorului $\lambda - \lambda_0$.

Teorema 2.1. Fie H_φ o algebră polinomială generată de un polinom de forma $\varphi = (\lambda - \lambda_0)^n$, $n > 1$. Atunci există în H_φ o bază $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ astfel încît, $1 = e_1$, $e_i^2 = e_i + 1$, $e_i e_j = e_i + j - 1$ dacă $i \neq j$ şi $i + j - 1 < n$, respectiv $e_i e_j = 0$ dacă $i \neq j$ şi $i + j - 1 \geqslant n$.

Algebra H_φ este suma unei algebre H_1 izomorfe cu $\mathbb{R}$ şi a radicalului R al algebrei. Mai mult $R^n = \{0\}$, deci, indicele radicalului depăşeşte cu o unitate ordinul subalgebrei.

Demonstraţie. Dacă algebra H_φ este generată de un polinom de forma $\varphi = (\lambda - \lambda_0)^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $n \in N$, atunci există o bază ciclică $e^\circ = 1, e, \ldots, e^{n-1}$ şi fie M matricea corespunzătoare elementului $e \in H_\varphi$ prin reprezentarea regulată pe

algebra de matrice, m_φ. În algebra m_φ există o bază ciclică $M^0=E, M, \ldots, M^{n-1}$ astfel încît,

$$E=M_1,\quad M=\lambda_0 M_1+M_2,\quad M^2=\lambda_0^2 M_1+2\lambda_0 M_2+M_3,\ ,\ldots,$$

$$M^{n-1}=M_1\lambda_0^{n-1}+\binom{n-1}{1}\lambda_0^{n-2}M_2+\ldots+\binom{n-1}{n-2}\lambda_0 M_{n-1}+M_n.$$

Matricele componente M_i, $i=\overline{1,\ n}$, au următoarele proprietăți :

1°. Sînt liniar independente

$$2^\circ.\ M_iM_j=\begin{cases} M_{i+j-1} & \text{dacă } i\neq j \text{ și } i+j-1<n \\ 0 & \text{dacă } i+j-1\geqslant n. \end{cases}$$

și deci matricele M_i, $i=\overline{1,\ n}$, constituie o bază în algebra m_φ.

Atunci există în algebra H_φ o bază $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ dată de $\Psi^{-1}(M_i)=e_i$, unde $\Psi^{-1}: m_\varphi\to H_\varphi$ este izomorfismul invers de algebre, astfel încît să avem $1=e_1$, $e_i^2=e_{1+1}$, $e_ie_j=e_{i+j-1}$ dacă $i+j-1<n$ iar e_ie_j dacă $i\neq j$ și $i+j-1\geqslant n$. Mulțimea $H_1=\{\alpha_1e_1\mid \alpha_j\in\mathbb{R}\}$ este o subalgebră a algebrei H_φ și $H_1\approx\mathbb{R}$.

Mulțimea elementelor de forma $\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\ldots+\alpha_ne_n$ constituie radicalul R al algebrei și se verifică ușor că $R^n=\{0\}$. Deci indicele radicalului depășește cu o unitate ordinul subalgebrei R.

3. Fie H_φ algebra polinomială generată de polinomul $\varphi=(\lambda-\lambda_0)^n$ și m_φ algebra de matrice izomorfă cu H_φ generată de matricea M atașată polinomului φ. Atunci o funcție $F: V\subseteq H_\varphi\to H_\varphi$ este de forma :

$$(1)\qquad F(x)=\sum_{i=0}^{n-1}U_i(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\,e^i$$

unde $\{e^i\}_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ este o bază a algebrei iar $U_i: V^*\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=\overline{0,\ n-1}$

Definiția 3.1. Sistemul de funcții $F=(U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_{n-1})$, scris ca o matrice coloană, se numește cvasivector.

Fie operatorul :

$$(2)\qquad D=E\frac{\partial}{\partial x_0}+M\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+M^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

unde E este matricea unitate.

Definiția 3.2. Dacă cvasivectorul $F=(U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_{n-1})$, $U_i\in C^1[V^*]$, $e=\overline{1,\ n}$, satisface în V ecuația

$$(3)\quad DF=0$$

atunci F se numește cvasivector $H-$ olomorf în V.

Pentru început să considerăm cazul $n=3$. Operatorul

$$(4)\qquad D=E\frac{\partial}{\partial x_0}+M\frac{\partial}{\partial x_1}+M^2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

se poate scrie și sub forma :

$$(5)\quad D=\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+\lambda_0\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_0^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)M_1+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+2\lambda_0\frac{\partial}{\partial x_2}\right)M_2+\frac{\partial}{\partial x_0}\cdot M_3$$

unde M_1, M_2, M_3 sînt matricele componente ale matricei M.

Teorema 3.1. Dacă cvasivectorul F este H-olomorf în V, atunci componentele sale U_i, $i=\overline{0,2}$, verifică următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi și omogen.

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_0}{\partial x_0}+\dfrac{\partial U_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}=0 \\ \lambda_0^3\dfrac{\partial U_0}{\partial x_2}+\dfrac{\partial U_1}{\partial x_0}-3\lambda_0^2\dfrac{\partial U_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}+3\lambda_0\dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}=0 \\ \lambda_0^3\dfrac{\partial U_0}{\partial x_1}+3\lambda_0^4\dfrac{\partial U_0}{\partial x_2}-3\lambda_0^2\dfrac{\partial U_1}{\partial x_1}-8\lambda_0^3\dfrac{\partial U_1}{\partial x_2}+3\lambda_0\dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}+6\lambda_0^2\dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}=0 \end{cases}$$

Teorema 3.2. Componentele U_i, $i=\overline{0,2}$, ale cvasivectorului F de clasă C^3 [V^*], H-olomorf în V, sînt soluții particulare ale ecuației

$$(7)\quad 2\lambda_0^3\frac{\partial^3\psi}{\partial x_2^3}+2\lambda_0^2\frac{\partial^3\psi}{\partial x_0\,\partial x_2^2}+3\lambda_0^2\frac{\partial^3\psi}{\partial x_2\,\partial x_2^2}+\lambda_0\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1^2\,\partial x_2}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x_0\,\partial x_1\,\partial x_2}=0$$

Demonstrație : Relația (5) ne permite să introducem următorii operatori.

$$(8)\quad \delta_1=\frac{\partial}{\partial x_0}+\lambda_0\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_0^2\frac{\partial}{\partial x_2},\qquad \delta_2=\frac{\partial}{\partial x_1}+2\lambda_0\frac{\partial}{\partial x_2},\qquad \delta_3=\frac{\partial}{\partial x_2}$$

respectiv, operatorul $\Delta_3=\delta_3(\delta_2(\delta_1))$. Atunci eliminînd componentele U_1, U_2 din sistemul (6) obținem că U_0 este o soluție particulară a ecuației $\Delta_3\Psi=0$ iar ecuația (7) poate fi adusă la forma

$$(9)\quad \frac{\partial^3\psi}{\partial w_1\,\partial w_2\,\partial w_3}=0$$

unde $w_1=x_0+\lambda_0x_1+\lambda_0^2x_2$, $w_2=x_1+2\lambda_0x_2$, $w_3=x_2$

În general, fie H_φ o algebră polinomială generată de un polinom de forma $\varphi=(\lambda-\lambda_0)^n$ și m_φ algebra de matrice izomorfă cu H_φ generată de matricea M atașată polinomului φ.

Operatorul $D=E\frac{\partial}{\partial x_0}+M\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots M^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$, în acest caz, se poate scrie și sub forma :

$$(10)\quad D=\sum_{i=1}^{n}M_i\left[\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}+\binom{i}{i-1}\lambda_0\frac{\partial}{\partial x_i}+\right.$$

$$\left.+\binom{i+1}{i-1}\lambda_0^2\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}+\ldots+\binom{n-1}{i-1}\lambda_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right]$$

unde M_i, $i=\overline{1,n}$, sînt matricele componente ale matricei M.

Relaţia (10) ne permite să introducem următorii operatori :

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} + \binom{i}{i-1}\lambda_0 \frac{\partial}{\partial x_i} + \binom{i+1}{i-1}\lambda_0^2 \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} + \ldots + \binom{n-1}{i-1}\lambda_0^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

$i=\overline{1, n}$, numiţi operatori conjugaţi, respectiv, operatorul iterat,

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} \delta_i$$

Fie $F : V \subseteq H_\varphi \to H_\varphi$, $F=(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1})$, un cvasivector.

Teorema 3.3. Componentele U_i, $i=0$, $i=\overline{n-1}$, ale cvasivectorului F de clasă C^n [V^*], H-olomorf în V, sînt soluţii particulare ale ecuaţiei $\Delta_n \Psi = \prod_{i=1}^{n} \delta_i \Psi = 0$

Mai mult ecuaţia $\Delta_n \Psi = 0$ poate fi adusă la forma

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial w_1 \partial w_2 \partial w_n} = 0$$

unde

$$w_i = x_{i-1} + \binom{i}{i-1}\lambda_0 x_i + \ldots + \binom{n-1}{i-1}\lambda_0^{n-1} x_{n-1}$$

$i=\overline{1, n}$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Creangă, I: Algebre, Editura tehnică Bucureşti, 1973 Enescu, I:

[2] Roşculeţ, M. N.: Funcţii monogene pe algebre comutative. Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1975

[3] P. N. Izvercian; A. Hadnagy: Sur une classe des algébres polynomiales. Bul. şt. IPT Tom. 22 (36) fasc. 1, 1977

[4] P. N. Izvercian; A. Hadnagy: Asupra unor reprezentări matriceale în probleme de vibraţii.
Conferinţa „Vibraţii în construcţii de maşini", Timişoara, 1978

H-HOLOMORPHE FUNCKTIONEN AUF EINER POLYNOMIAL ALGEBRA MIT RADIKAL

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit bringen wir eine Klasse von Algebren mit Radikal.

Mit Hilfe des Operators (2) definieren wir die H-holomorphe Funktion und untersuchen die Eigenschaften der komponenten Funktionen auf dieser Klasse von Algebren.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“
Timişoara

Tom 24 (38) Fascicola 2—1979

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

PRODUSE SUBDIRECTE DE VARIETĂŢI DE ALGEBRE UNIVERSALE

DE

CARMENCITA UROŞU

Fie $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ varietăţii de algebre universale similare de tipul τ. Prin analogie cu produsele directe de variatăţi definite în [2] se introduce noţiunea de produs subdirect de varietăţi de algebre universale.

Definiţia I. Clasa tuturor algebrelor izomorfe cu un produs subdirect de algebre $\mathfrak{U}_i \in \mathfrak{V}_i$, $i=\overline{I, n}$ se numeşte produsul subdirect al varietăţilor $\mathfrak{V}_i$, $i=\overline{I, n}$.

Produsul subdirect al varietăţilor $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ se notează cu $\pi_s \mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ şi evident are loc incluziunea :

$$\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n \subseteq \mathfrak{V}_1 V \mathfrak{V}_2 V \ldots V \mathfrak{V}_n$$

Clasa $\pi_s \mathfrak{V}_i$ în general nu este închisă faţă de operatorii P, S, H şi deci nu este o varietate. Vom cerceta condiţii în care produsul subdirect al unui număr finit de varietăţi este o varietate şi coincide cu reuniunea varietăţilor respective.

Teorema I.

Relaţia : $\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}_1 V \mathfrak{V}_2 V \ldots V \mathfrak{V}_n$ are loc dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii : $\exists\, p \in \mathfrak{B}_\tau^{(n)}$ astfel ca ,

1) $p(x, x, \ldots, x) = x$

2) $p(x, x, \ldots, f_\gamma(x_0, x_1, \ldots, x_{n_\gamma - 1}), \ldots, x) = p(x, x, \ldots, f_\gamma^i(p(x, \ldots, x_0, \ldots, x), \ldots, p(x, \ldots, x_{n_\gamma - 1} \ldots, x)), \ldots, x)$

are loc în fiecare varietate $\mathfrak{V}_i$, $i=\overline{I, n}$ şi pentru fiecare f_γ, $\gamma < 0$ (τ).

3) Dacă $\varphi = \underset{i}{\varphi}$ este identitate în $\mathfrak{V}_i$, $i=\overline{I, n}$, atunci $p(x, x, \ldots, \underset{i}{\varphi}, \ldots, x) = p(x, x, \ldots, \underset{i}{\varphi}, \ldots, x)$ este o identitate şi în varietatea $\mathfrak{V}_{jj}$ pentru $\forall j$.

Demonstraţie.

Fie $U = \langle A ; F \rangle \in \mathfrak{V}_1 V \mathfrak{V}_2 V \ldots V \mathfrak{V}_n$. Pe algebra U se definesc relaţiile binare θ_i astfel :

$$a \theta_i b \Leftrightarrow p(x, x, \ldots, \underset{i}{a}, \ldots, x) = p(x, x, \ldots, \underset{i}{b}, \ldots, x), \ \forall x \in A, \ i=I, n.$$

Relaţiile θ_i sînt evident relaţii de echivalenţă pe algebra U. Vom arăta compatibilitatea relaţiilor θ_i cu operaţiile din F. Fie $f_\gamma \in F$ şi $a_m \theta_i b_m$, $m=1, \ldots, n_\gamma$; $a_m, b_m \in A$.

Avem :

$$a_m \theta_i b_m \Leftrightarrow p(x, \ldots, a_m^i, \ldots, x) = p(x, \ldots, b_m^i, \ldots, x), \ \forall x \in A.$$

Atunci :

$$p(x, \ldots, f_\gamma(p(a_1, \ldots, a_{n_\gamma}), \ldots, x) = p(x, \ldots, f_\gamma(p(x, \ldots, \overset{i}{a_1}, \ldots, x), \ldots$$

$$\ldots, p(x, \ldots, a_{n_\gamma}^i, \ldots, x), \ldots, x) \overset{2)}{=} p(x, \ldots, f_\gamma(p(x. \ldots, b_1^i, \ldots, x), \ldots$$

$$\ldots, p(x, \ldots, b_{n_\gamma}^i, \ldots, x)), \ldots, x) \overset{2)}{=} p(x, \ldots, f(b_1, b_2, \ldots, b_{n_\gamma}), \ldots x)$$ și

deci avem :

$$f_\gamma(a_1 \ldots, a_{n_\gamma}) \ \theta_i f_\gamma(b_1, \ldots, b_{n_\gamma}).$$

Dacă $a \theta_i b$ pentru $i = \overline{1, n}$, atunci conform I) avem : $a = p(a, \ldots, a) = p(a, \ldots, b_i, \ldots, a) = p(b, \ldots, b) = b$, ceea ce înseamnă că $\wedge \theta_i = \omega$. Deci funcția : $\varphi : a \to <[a]\theta_1, \ldots, [a]\theta_n>$ este un izomorfism al algebrei U cu produsul subdirect al algebrelor U/θ_i.

Vom arăta că algebra cît $U/\theta_i \in \mathfrak{V}_i$, $i = \overline{1, n}$. Dacă $\varphi = \varphi$ este o identitate în $\mathfrak{V}_i$, atunci conform 3) avem :

$p(x, x, \ldots, \overset{i}{\varphi}, \ldots, x) = p(x, x, \ldots, \overset{i}{\varphi}, \ldots, x)$ în fiecare varietate $\mathfrak{V}_j$, $j = \overline{I\, n}$, și deci are loc și în varietatea $\mathfrak{V}_1 \vee \mathfrak{V}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{V}_n$ adică și în algebra U.

Conform definiției congruenței θ_i avem $\varphi \theta_i \varphi$ și deci $U/\theta_i \in \mathfrak{V}_i$ pentru $i = \overline{I, n}$ ceea ce înseamnă că $U \in \mathfrak{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ și astfel rezultă :

$$\mathfrak{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{V}_n.$$

În [3] se definește completitudinea polinomială a unei algebre universale :

Definiția 2. O algebră universală $U = <A ; F>$ este polinomial completă dacă fiecare funcție $f : A^n \to A$ care satisface condițiile $(P_1) - (P_3)$ este un polinom pe A :

(P_1) $a_1, \ldots, a_n \in A \Rightarrow f(a_1 \ldots, a_n) \in [a_1, \ldots, a_n]$.

(P_2) $\forall S \in \varphi(U)$ și $\theta \in \varphi(S)$; $a_i, b_i \in S$ avem :

$a_i \equiv b_i (\theta)$, $i = \overline{I, n} \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \equiv f(b_1, \ldots, b_n) (\theta)$
adică orice congruență pe S este f-admisibilă.

(P_3) $\forall S_1, S_2 \in \varphi(U)$, $\theta_1 \in \mathfrak{C}(S_1)$, $\theta_2 \in \mathfrak{C}(S_2)$, dacă se definesc : $f_i : (S_i/\theta_i)^n \to \to (S_i/\theta_i)$, $i = I, 2$ prin relația :

$f_i([a_1]\theta_i, \ldots, [a_n]\theta_i) = [f(a_1, \ldots, a_n)]\ \theta_i$ și dacă $g : S_1/\theta_1 \to S_2/\theta_2$ este un izomorfism, atunci :

$g(f_1([a_1]\theta_1, \ldots, [a_n]\theta_1)) = f_2(g([a_1]\theta_1), \ldots, g([a_n]\theta_1))$ pentru orice $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \in S_1$.

Are loc următoarea teoremă :

Teorema 2. Dacă $\mathfrak{V}_i$, $i = \overline{I, n}$ sînt varietăți polinomial complete independente, atunci orice algebră $U \in \mathfrak{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ este polinomial completă.

Demonstrație. Fie $U \in \mathfrak{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ și presupunem că $\mathfrak{V}_i$, $i = I, n$ sînt varietăți polinomial complete independente. Deci pentru orice algebră $U_i = <A_i ; F>$,

există polinoamele p_i astfel ca $p_i=f^{(i)}$ unde $f^{(i)}: (A_i)^k \to A_i$ sînt definite cu ajutorul unei funcții $f: A^k \to A$ care satisface condițiile $(P_1)-(P_3)$:

$f^{(i)}(a_1, \ldots, a_k)=f(a^1, \ldots, a^k)_i$ unde $a_j \in A_i$, $j=I, \ldots, k$ iar $a^j \in A$ și are a i-a componentă a_j, $j=I, \ldots, k$.

Dacă θ_i este nucleul proiecției canonice $U \overset{\varphi_i}{\to} U_i$ unde $U \leqq \pi_s U_i$, atunci $U/\theta_i \cong U_i$ prin izomorfismul: $[a]\theta_i \overset{\varphi}{\to} a_i$.

Deci:

$(U/\theta_i)^k \cong U_i^k$ și $p_i=f(i)$ unde $f(i): (U/\theta_i)\ U/\theta_i$ sînt definite prin:

$f(i)\ ([a_1]\theta_i, \ldots, [a_k]\theta_i)=[b]\ \theta_i$.

Deoarece $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_n$ sînt varietăți independente, rezultă că există polinomul $p \in \mathfrak{R}_{(\tau)}^{(n)}(\tau)$ astfel ca $p=p_i$ este o identitate în $\mathfrak{V}_i$ și deci este o identitate pentru algebrele U_i și U/θ_i. Dar $p_i=f_i$ pe U/θ_i și avem $p=f_i$ pe $(U/\theta_i)^k$. Algebra U fiind un produs subdirect al algebrelor U_i, $\wedge\theta_i=\omega$ și deci $p=f$ pe U^k. Rezultă că algebra U este polinomial completă.

Definiția 3. Spunem că o varietate $\mathfrak{V}$ satisface condiția C.R.T. dacă pentru fiecare $U=<A\ ;\ F> \in \mathfrak{V}$ și fiecare $\{\theta_2, \ldots, \theta_n\} \in \mathcal{C}(U)$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel ca $x_i \equiv x_j\ (\theta_i \vee \theta_j)$, $i, j=I, \ldots, n$, există un $x \in A$ pentru care $x \equiv x_i\ (\theta_i)$, $i \equiv I, \ldots, n$.

Conform [*I*] condiția C.R.T. este echivalentă cu faptul că pentru fiecare $U \in \mathfrak{V}$, laticea $\mathcal{C}(U)$ este distributivă și congruențele comută. ([1)]; exercițiul 68).

Au loc următoarele consecințe ale teoremei 2:

Corolarul 1. Dacă $\mathfrak{V}_i$, $\overline{i=I, n}$ sînt varietăți local finite de algebre care satisfac condiția C.R.T., atunci fiecare algebră în produsul subdirect $\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ este polinomial completă.

Demonstrație. O varietate $\mathfrak{V}$ este local finită dacă algebrele finit generate sînt finite. Dacă $\mathfrak{V}$ satisface condiția C.R.T., conform Teoremei 4.3 rezultă că fiecare algebră în $\mathfrak{V}$ este polinomial completă. Aplicînd varietăților $\mathfrak{V}_i$, $i=\overline{I, n}$, Teorema 2 rezultă enunțul corolarului.

Corolarul 2. Dacă A este o algebră finită și $\mathfrak{V}(A)=HSP(A)$ verifică condiția C.R.T., atunci orice $B \in \mathfrak{V}(A)$ este polinomial completă.

În lucrarea [4] este studiată o reprezentare externă a produselor subdirecte de algebre universale. În cazul varietăților de algebre universale vom defini algebrele W-omomorfe astfel:

Definiția 4. Algebrele $U_j=<A_j\ ;\ F>$, $U_j \in \mathfrak{V}_j$, $j=\overline{I, n}$, se numesc W-omomorfe dacă există o algebră $B \in \mathfrak{V}_1 V \ldots V \mathfrak{V}_n$ și familia de omomorfisme $\Phi_i: U_i \to B$ astfel încît Φ_i sînt epimorfisme pentru fiecare $i=\overline{I, n}$.

Conform [4], Lema *I*, algebra $U=<A\ ;\ F>$ cu A definită prin condiția:

$$A=\{a \in \prod_{j=1}^{n} U_j / \Phi_i(a_i)=\Phi_j(a_j),\ \forall i, j=\overline{I, n}\}$$

este un produs subdirect al algebrelor U_j $(j=\overline{I, n})$ și această reprezentare a algebrei $U \in \mathfrak{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ se numește W-construibilă.

Din [4] Teorema 2, rezultă pentru varietăți de algebre universale următoarea teoremă :

Teorema 3. Dacă algebra $U \in \mathfrak{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ și θ_i, $i=\overline{I, n}$, este o familie de congruențe pe U astfel ca $U/\theta_i \in \mathfrak{V}_i$, atunci $U \cong \pi_s (U/\theta_i)$ prin izomorfismul natural $\varphi : a \to <[a]\theta_1, \ldots, [a]\theta_n>$ și este W-construibilă *d.* și *n.d.* mulțimea $\{\theta_i\}_{i=1,n}$ este absolut permutabilă și $\wedge\theta_i=\omega$.

Exemplu. În cazul $n=2$, cînd $\mathfrak{V}_1$ și $\mathfrak{V}_2$ sînt două varietăți de semigrupuri idempotente astfel încît sînt satisfăcute identitățile :

(1) $xoyoz=yoxoz$ în $\mathfrak{V}_1$ și

(2) $xoyoz=xozoy$ în $\mathfrak{V}_2$,

varietatea $\mathfrak{V}_1 \vee \mathfrak{V}_2$ este varietatea semigrupurilor idempotente care satisfac identitatea : $xoyozou=xozoyou$. Polinomul $p(x, y)=xoy$ satisface condițiile teoremei I și deci : $\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_1 V \mathfrak{V}_2$.

Pentru un semigrup $U=<A ; O> \in \mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2$ se definesc relațiile θ_1, $\theta_2 \in \varphi(U)$ și conform Teoremei I avem $\mathfrak{U} \mid \theta_1 \in \mathfrak{V}_1$ și $\mathfrak{U} \mid \theta_2 \in \mathfrak{V}_2$. Dacă θ_1 și θ_2 comută, atunci semigrupul U admite o reprezentare W-construibilă prin omomorfismele : $\Phi_i : U/\theta_i \to U/\theta_1 V \theta_2 = B$, $i=I, 2$ și

$$A\{a=(a_1, a_2) \in (U/\theta_1) \quad (U/\theta_2) \quad | \quad \Phi_1(a_1)=\Phi_2(a_2).\}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Grätzer G. : Universal algebra, I. ed., Princeton, 1968.

2. Grätzer G., Lakser H., Plonka J. : Join and direct products of equational. classes, Canad. Math. Bull. 12 1969, 741—744.

3. Pixley A. F. : Completeness in arithmetical algebras, Algebra universalis, vol. 2/2, 1972

4. Wenzel G. H. : Note on a subdirect representation of universal algebras, Acta math. Acad. Scient. hung. 18, 1967, 329—333.

PRODUITS SUBDIRECTS DES VARIÉTES DES ALGÈBRES UNIVERSELLES

RÉSUMÉ

Dans le présent travail sont étudiées quelques proprietes des produits subdirects des variétés des algèbres universelles. Sont donnes des conditions suffisantes pour la relation : $\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}_1 V \ldots V \mathfrak{V}_n$. Le produit $\pi_s \mathfrak{V}_i$ est étudiè dans le cas de variétes polynomiales completes. Pour $U \in \mathfrak{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{V}_n$ est étudié une representation W-construibille.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

CONSTRUCŢIA UNOR CLASE DE SOLUŢII ALE UNOR ECUAŢII FUNCŢIONALE

DE

B. CRSTICI, M. NEAGU, GH. TUDOR

1. În 1905, G. Hamel a pus pentru prima oară în evidenţă [4] existenţa soluţiilor discontinue pentru ecuaţia lui Cauchy [2]. De atunci au mai fost puse în evidenţă soluţii discontinue şi pentru alte ecuaţii funcţionale [1].

În această lucrare, folosind baza algebrică (sau baza Hamel) a unui spaţiu vectorial, se va da construcţia unei clase de soluţii pentru ecuaţii funcţionale de o formă specificată, în ipoteza cunoaşterii, în prealabil, a unei soluţii inversabile.

2. Fie X un spaţiu vectorial (peste corpul K), iar Y şi Z mulţimi oarecare. Fie $E=\{e_i\}_{i\in I}$ o bază algebrică în X.

În această lucrare se vor considera ecuaţii funcţionale de forma

$$\chi\,[f(\alpha_1 x+\beta_1 y),\ f(\alpha_2 x+\beta_2 y),\ \ldots,\ f(\alpha_n x+\beta_n y),\ f(x),\ f(y)]=\theta \qquad (1)$$

cu necunoscuta : $f: X\to Y$, unde $\chi: Y^{n+2}\to Z$ este o funcţie dată, iar $\alpha_i,\ \beta_i\in K$, $1\leqslant i\leqslant n$; $\theta\in Z$ sînt de asemenea date.

Se va arăta că pentru orice soluţie g inversabilă, $g: X\to Y$, a ecuaţiei (1) se poate construi o familie $\mathcal{G}_E$ de soluţii ale ecuaţiei (1).

Teoremă : Dacă $g: X\to Y$ este o soluţie a ecuaţiei funcţionale (1) şi dacă g este inversabilă, atunci funcţia $G: X\to Y$ definită în felul următor :

1. $G(e_i)\in j$, altfel arbitrar, oricare ar fi $e_i\in E$.

2. Dacă $x\notin E$, adică

$$x=\sum_{i\in H}\xi_i e_i,\quad \xi_i\in K,\quad e_i\in E,$$

iar H o parte finită a lui I.

$$G(x)=g\left(\sum_{i\in H}\xi_i g^{-1}[G(e_i)]\right) \qquad (2)$$

este de asemenea soluţie a ecuaţiei (1).

Demonstraţie: Fie $x,\ y\in X$. Se ştie că se poate lua aceeaşi parte finită H a lui I pentru orice pereche $x,\ y\in X$ (sau orice număr finit de elemente din X, adică

$$x=\sum_{i\in H}\xi_i e_i,\quad \xi_i\in K,\quad e_i\in E$$

$$y=\sum_{i\in H}\eta_i e_i,\quad \eta_i\in K,\quad e_i\in E$$

atunci

$$\alpha x+\beta y=\sum_{i\in H}(\alpha\xi_i+\beta\eta_i)\,e_i$$

oricare ar fi α, $\beta\in K$

Dacă se notează cu

$$\bar{x}=\sum_{i\in H}\xi_i g^{-1}[G(e_i)]$$

$$\bar{y}=\sum_{i\in H}\eta_i g^{-1}[G(e_i)]$$

atunci

$$G(\alpha x+\beta y)=g(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})$$

oricare ar fi α, $\beta\in K$.

Prin urmare

$$\chi[G(\alpha_1x+\beta_1y),\ G(\alpha_2x+\beta_2y),\ \ldots,\ G(\alpha_nx+\beta_ny),\ G(x),\ G(y)]=$$

$$=\chi[g(\alpha_1\bar{x}+\beta_1\bar{y}),\ g(\alpha_2\bar{x}+\beta_2\bar{y}),\ \ldots,\ g(\alpha_n\bar{x}+\beta_n\bar{y}),\ g(\bar{x}),\ g(\bar{y})]=\theta$$

și teorema este demonstrată.

Se va nota cu $\mathcal{G}_E$ mulțimea soluțiilor G care corespund soluției g. mulțimea realizîndu-se prin faptul că valorile lui G în elementele bazei algebrice alese sînt arbitrare.

În particular, $g\in\mathcal{G}_E$ pentru acea funcție G pentru care

$$G(e_i)=g(e_i)$$

oricare ar fi $e_i\in E$.

3. **Consecințe** 1) Dacă $g: X\to Y$ este o soluție inversabilă a ecuației (1) cu proprietatea că atît g cît și $g\circ f$, unde $f(x)=ax$, $a\in K$ sînt soluții, atunci oricare ar fi $G\in\mathcal{G}_E$ are aceeași proprietate.

2) Dacă g și h sînt soluții inversabile distincte ale ecuației (1), atunci oricare ar fi baza algebrică E, există $g_1\in\mathcal{G}_E$ și $h_1\in\mathcal{H}_E$, astfel ca $g_1\neq h_1$.

3) Dacă g și h sînt două soluții $g: X\to Y$, $h: X\to Y$ inversabile distincte ale ecuației (1) și dacă $h^{-1}\circ g: X\to X$ nu este o aplicație liniară, atunci $g\notin\mathcal{H}_E$.

În adevăr, dacă $g\in\mathcal{H}_E$, înseamnă că $g=h_1$, unde $h_1\in\mathcal{H}_E$. Atunci

$$h_1(e_i)=g(e_i)$$

oricare ar fi $e_i\in E$ oricare ar fi $x\notin E$ $(x\in X)$

$$h_1(x)=h\Big(\sum_{i\in H}\xi_i h^{-1}(g(e_i))\Big)=g\Big(\sum_{i\in H}\xi_i e_i\Big)$$

de unde

$$h^{-1}\circ g\Big(\sum_{i\in H}\xi_i e_i\Big)=\sum_{i\in H}\xi_i h^{-1}\circ g(e_i)$$

oricare ar fi $\xi_i\in K$ și oricare ar fi $e_i\in E$, de unde ar rezulta că $h^{-1}\circ g$ ar fi o aplicație liniară de la X la X.

Fie, de exemplu, ecuația lui Th. Angheluță [3, pag. 283]

$$\frac{f(x+4y)-f(x+y)}{f(x+3y)-f(x+2y)}=\frac{f(x+3y)-f(x)}{f(x+2y)-f(x+y)}\qquad(3)$$

unde $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este funcția necunoscută.

Funcțiile continue f care verifică ecuația (3) se știe că sînt de forma

$$f(x)=A+Be^{ax}+Ce^{-ax} \tag{4}$$

sau

$$f(x)=A+Bx+Cx^2 \tag{5}$$

unde A, B, C și a sînt constante reale arbitrare.

Fie soluțiile

$$g(x)=A_1+B_1R^{a_1x}+C_1R^{-a_1x},\ B_1>0,\ C_1<0 \tag{6}$$

$$h(x)=A_2+B_2R^{a_2x}+C_2R^{-a_2x},\ B_2>0,\ C_2<0 \tag{7}$$

care sînt inversabile pe $\mathbb{R}$. Se poate constata că $h^{-1}\circ g$ este o aplicație liniară de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$, numai dacă

$$A_1=A_2,\ B_1=B_2,\ C_1=C_2$$

Astfel se pot construi o infinitate de clase de soluții cu proprietatea menționată în această consecință.

4) Dacă ecuația (3) se reduce la o ecuație de adițiune Cauchy, atunci construcția din teoremă dă soluția cea mai generală a acestei ecuații.

5) Dacă X este un spațiu vectorial (peste K) topologic, Y este un spațiu topologic și dacă se cunoaște clasa $\mathcal{C}$ a soluțiilor continue ale ecuației (3), atunci construcția din teoremă pentru soluțiile continue și inversabile poate pune în evidență soluții discontinue.

De exemplu, pentru ecuația lui Th. Angheluță (3) orice soluție continuă inversabilă g dată de (6) definește în clase de soluții $\mathcal{G}_E$, soluții G ale ecuației (3) care sînt discontinue, dacă se iau valorile lui G în baza E diferite de valorile oricărei funcții continue f (date pe (4) și (5)) în această bază E.

6) Același procedeu se poate aplica și ecuațiilor funcționale de forma

$$\chi[f(\alpha_1x+\beta_1y),\ \ldots,\ f(\alpha_nx+\beta_ny),\ f(x),\ f(y),\ g(\gamma_1x+\delta_1y),\ \ldots,\ g(\gamma_mx+\delta_my),$$
$$g(x),\ g(y)]=0 \tag{8}$$

deci cu mai multe funcții necunoscute (aici f și g) decît în (3) sau pentru sisteme de astfel de ecuații funcționale.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Aczel „Functional equations and their applications" Acad. Press, New York, 1966
2. A. L. Cauchy „Cours d'analyse l'Ecole Polytechnique", Paris, 1821
3. M. Ghermanescu „Ecuații funcționale" Editura Academiei, București, 1960
4. G. Hamel „Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$", Math. Ann. 60, 459–462, 1905

LA CONSTRUCTION DES CERTAINES CLASSES DES SOLUTIONS POUR QUELQUES EQUATIONS FONCTIONNELLES

RÉSUMÉ

En utilisant la base algébrique d'un espace vectoriel, on présente dans ce travail la construction d'une classe des solutions pour certaines équations fonctionnelles, dans l'hypothèse q'uon connait une solution inversable de l'équation respective.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia"
Timişoara

Tom 24 (38) Fascicola 2—1979

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

NOTE ON THE UNIFORM BOUNDEDNESS OF THE TOPOLOGICAL TRANSFORMATION GROUPS

BY

H. LUDESCHER

Introduction In this note we show that for every topological transformation group there is a greatest uniform structure on the phase space (not necessarily compatible with its topology) related to which the respective topological transformation group is uniformly bounded (for „uniform boundedness" see the definition given in § 1). We describe a base of this uniformity and prove that the topology defined by it is finer than that given initially on the phase space. This fact allows us to give a criteria derived from one of J. de Vries ([4], theorem 7.3.12) for the existence of G-compactifications.

1) **A topological transformation group** (t.t.g.) is a triplet (G, X, π), where G is a topological group, X a topological space and $\pi : G\times X\to X$ is a continuous map, verifying :

(*i*) $\pi(e, x)=x$ (e=the identity from G), for every $x\in X$,

(*ii*) $\pi(t_1, \pi(t_2, x))=\pi(t_1t_2, x)$ for every $t_1, t_2\in G$ and $x\in X$.

Being given a $t\cdot t\cdot g$. (G, X, π) we shall define for every $x\in X$ the function $\pi x : G^{\circ} X$ through the relation $\pi x(t)=\pi(t, x)$ $(t\in G)$; the so defined function πx $(x\in X)$ is called the *motion* of x in the t.t.g. (G, X, π).

1.1) *Definition.* Let (G, X, π) be a t.t.g. and let $\mathfrak{U}$ be an arbitrary uniformity on the set X (not necessarily generating the topology of X). (G, X, π) is said to be $\overset{\infty}{\mathfrak{U}}$ — *bounded* (or *motion* $\overset{\infty}{\mathfrak{U}}$ — *equicontinuous*) if for each $U\in\mathfrak{U}$ there is a neighbourhood Γ of e such that :

$$t\in\Gamma\Rightarrow(\pi(t, x), x)\in U \text{ for all } x\in X$$

Sometimes we use the term „uniformly bounded" instead of $\mathfrak{U}$ — bounded ; in this case the uniformity $\mathfrak{U}$ results from the context.

1.2. *Remark.* (G, X, π) is $\mathfrak{U}$ — bounded iff the family $\{\pi x/x\in X\}$ is $\mathfrak{U}$ — equicontinuous at e, or equivalently iff $\{\pi x/x\in X\}$ is $\mathfrak{U}$ — uniformly equicontinuous on G if we endowe this with its right uniformity [3].

1.3. *Remark.* Considering on X the uniformity $\{X\times X\}$, then each t.t.g. (G, X, π) is (uniformly) bounded related to $\{X\times X\}$. Further on if $\{\mathfrak{U}_\alpha/\alpha\in A\}$ is a family of uniformities such that (G, X, π) is $\mathfrak{U}_\alpha$ — bounded for each $\alpha\in A$, then (G, X, π) is uniformly bounded related to the supremum of the family $\{\mathfrak{U}_\alpha/\alpha\in A\}$.

Therefore being given a t.t.g. (G, X, π), there is always a greatest uniformity $\mathfrak{U}$ on X such that (G, X, π) is $\mathfrak{U}$ – bounded.

Henceforth we shall designate with $\mathfrak{V}_e^G$ the neighbourhood filter of e in G (and we shall use the notation $\mathfrak{V}_y^Y$ for the neighbourhood filter of the point y in the topological space Y.

1.4. *Lemma.* Define for each $U \in \mathfrak{V}_e^G$:

$$[U] = \bigcup_{x \in X} (\pi x (U) \times \pi x (U)).$$

The family $\mathfrak{B}_\pi = \{[U] \mid U \in \mathfrak{V}_e^G\}$ is a base for a certain uniformity on X.

Proof. The following relations are immediate :

(*a*) $[U] \supseteq \Delta_X$ (Δ_X = the diagonal of X),

(b) $[U]^{-1} = [U]$,

(*c*) $[U \cap V] \subseteq [U] \cap [V]$ for each $U, V \in \mathfrak{V}_e^G$.

If now $U \in \mathfrak{V}_e^G$ and if V is an symmetric neighbourhood of e with $V^3 \subseteq U$ we get (making a straightforward reasoning) :

(*d*) $[V]^2 \subseteq [U]$ which together with (*a*) – (*c*) finishes the proof.

Notations.

(1) $\mathfrak{U}_\pi$ = the uniformity defined by the base $\mathfrak{B}_\pi$,

(2) τ_π = the topology defined by $\mathfrak{U}_\pi$ on X,

(3) $u(\mathfrak{U}_\pi)$ = the uniform weight of $(X, \mathfrak{U}_\pi)$,

(4) $lw(G)$ = the local weight of G.

1.5. *Remark.* $u(\mathfrak{U}_\pi) \leqslant lw(G)$; in particular if G is metrizable, then $\mathfrak{U}_\pi$ is also.

If $\mathfrak{B}$ is a base for $\mathfrak{V}_e^G$ then $\mathfrak{B}^* = \{[U] \mid U \in \mathfrak{B}\}$ is a base for $\mathfrak{U}_\pi$, and card $\mathfrak{B}^* \leqslant$ card $\mathfrak{B}$. The metrizable case is that when card $\mathfrak{B} \leqslant \aleph_0$.

1.6. *Lemma.* The topology τ_π is finer than that given initially on X.

Proof. We must find for each neighbourhood Φ of an $x_0 \in X$, – in the „old" topology – such a surrounding $[V] \in \mathfrak{U}_\pi$ which verifies :

(1) $[V]\,[x_0] \subseteq \Phi$.

By the continuity of π in (e, x_0) we have a $\Gamma_1 \in \mathfrak{V}_{x_0}^X$ and $U \in \mathfrak{V}_e^G$ with :

(2) $\pi(\Gamma_1, U) \subseteq \Phi$

Further we choase $\Gamma \in \mathfrak{V}_{x_0}^X$ and a symmetric $V \subseteq U$ ($V \in \mathfrak{V}_e^G$) verifying :

(3) $\pi(\Gamma, V) \subseteq \Gamma_1$.

Now from the definition of $[V]$ and from (3) and (4) follows (1).

1.7. *Remark.* If X has a T_1 – topology then $\mathfrak{U}_\pi$ (and τ_π also) is separated (Hausdorff).

This follows because τ_π is uniformizable.

1.8. *Theorem.* For every t.t.g. (G, X, π) there is a greatest uniformity on the set X related to which (G, X, π) is uniformly bounded. This uniformity is just $\mathfrak{U}_\pi$ and has the following properties:

(*j*) $u(\mathfrak{U}_\pi) \leqslant lw(G)$,

(*jj*) τ_π is finer than the topology of X.

(*jjj*) every transition π^t $(t \in G)$ is a unimorphism of the space $(X, \mathfrak{U}_\pi)$ onto itself; hence π^t is a homeomorphism of (X, τ_π) onto itself

(*jjjj*) if on X we consider the topology τ_π, then (G, X, π) is a t.t.g. in this instance also.

Proof. It is obvious that (G, X, π) is $\mathfrak{U}_\pi$ – bounded. If (G, X, π) is $\mathfrak{V}$ – bounded and $V \in \mathfrak{V}$ we will choose a symmetric $W \in \mathfrak{V}$ with $W^2 \subseteq V$.

Then there is $U \in \mathfrak{V}_e^G$ with:

$$(\pi x(t), t) \in W \text{ for } (t, x) \in U \times X$$

Now it readily follows that: $[U] \subseteq V$ hence $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}_\pi$.

(*j*) and (*jj*) follows from 1.5 and 1.6.

(*jjj*) Let $U \in \mathfrak{V}_e^G$ and $t \in G$; we take: $V = t^{-1}Ut \in \mathfrak{V}_e^G$.

$$(\pi^t X \pi^t)\ ([V]) = \bigcup_{x \in X} [\pi^t(\pi_x(t^{-1}Ut)) \times \pi^t(\pi_x(t^{-1}Ut))] = \bigcup_{x \in X} (\pi xt(U) \times \pi xt(U)) =$$

$$= [U].\ (xt \overset{\text{df}}{=} \pi(t, x))$$

(*jjjj*) It is enough – by (*jjj*) – to prove that π is continuous at (e, x_0) for every $x_0 \in X$.

We choose $U \in \mathfrak{V}_e^G$ and let $V \in \mathfrak{V}_e^G$ with: $V^2 \subseteq U$; we consider now $t \in V$ and $x \in [V][x_0]$. Then $(x_0, x) \in \pi_y(V) \times \pi_y(V)$ for some $y \in X$. This means that $x = \pi(s, y)$ with $s \in V$ and $y \in X$ hence $\pi(t, x) = \pi(ts, y) \in \pi_y(U)$.

But $\pi_y(V) \subseteq \pi_y(U)$ and therefore:

$$(x_0, \pi(t, x_0)) \in \pi_y(U) \times \pi_y(U) \subseteq [U], \textit{ i.e. } \pi(t, x) \in [U][x_0].$$

2) A **G – compactification** of the t.t.g. (G, X, π) is a t.t.g. (G, Y, σ) with Y T_2 – compact and in which (G, X, π) can be isomorphically embedded. It is known ([4], theorem 7.3.12) that a t.t.g. (G, X, π) has at least a G – compactification iff there is a uniformity $\mathfrak{U}$ compatible with the topology of X such that (G, X, π) is $\mathfrak{U}$ – bounded.

Moreover if every π^t is a unimorphism of $(X, \mathfrak{U})$ onto itself then Y can be choosen as being the T_2 – completion of $(X, \mathfrak{U}^*)$, $\mathfrak{U}^*$ being the finest precompact uniformity of X contained in $\mathfrak{U}$ ([2]); of course we assume that X *is completely regular*, i.e. uniformizable and Hausdorff.

2.1. *Theorem.* Let (G, X, π) be a t.t.g. with X completely regular. Then the following conditions are equivalent ones:

(*k*) (G, X, π) has a G – compactification,

(*kk*) there is a uniformity $\mathfrak{U}$ of X with: $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_\pi$,

(*kkk*) If $\mathfrak{U}_0$ is the fine uniformity of X then $\mathfrak{U}_0 \wedge \mathfrak{U}_\pi = \inf \{\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_\pi\}$ is a uniformity of X.

Proof. If (*k*) holds then (*kk*) follows by 1.8. If (*kk*) takes place we have : $\mathfrak{U}_0 \wedge \mathfrak{U}_\pi \supseteq \mathfrak{U}$, hence $\mathfrak{U}_0 \wedge \mathfrak{U}_\pi$ is a uniformity of X. Finally assume that $\mathfrak{U}_0 \wedge \mathfrak{U}_\pi$ is a uniformity of X ; then (G, X, π) is obviously $\mathfrak{U}_0 \wedge \mathfrak{U}_\pi$ – bounded and herefrom we get (*k*).

2.2. *Remark.* If $\mathfrak{U}_\pi$ is the fine or the Stone-Čech uniformity of its topology (i.e. of τ_π) then (G, X, π) has a G – compactification (we can apply the universality of the fine structure, resp. the universality of the Stone-Cech uniformity in the class of the precompact structures [1] and get just (*kk*)).

2.3. *Remark.* The condition (*kk*) leads us in a natural way to the following problem : if τ_1, τ_2 are two completely regular topologies on a set X verifying $\tau_1 \subseteq \tau_2$ and if $\mathfrak{U}$ is a uniformity of (X, τ_2), is there always a uniformity $\mathfrak{V}$ of (X, τ_1) with : $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}$? A positive answer for this question (combined with (*kk*)) would imply an afirmative solution for the problem : has every t.t.g. (G, X, π) – with X completely regular – a G – compactification ?

2.4. *Example.* In this example we show that the question from 2.3. has not a positive answer. Let X be the closed unit interval, let $\mathfrak{T}$ be the euclidean topology on X and let γ be the discrete topology of X. Obviously $(X, \mathfrak{T})$ has a unique uniformity $\mathfrak{V}$. We shall consider a uniformity of (X, γ) defined as follows : for each $x \in X$ we put :

$H_x = (\{x\} \times \{x\}) \cup (([0,1] / \{x\}) \times ([0,1] / \{x\}))$, and let us observe that $\mathcal{H} = \{H_x \mid x \in X\}$ is a subbase for a uniformity of (X, γ). Designate it by $\mathfrak{U}$. Let us observe that every $U \in \mathfrak{U}$ is dense in $X \times X$* (considering on it the usual topology) : but this is not the case for all $V \in \mathfrak{V}$. Hence we cannot have $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}$. (Obviosly (by (*kkk*)) the uniformity $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{U}$ is not compatible with $\mathfrak{T}$; therefore we have a simple example where the infimum of teo uniformities is not a uniformity for the infimum of the corresponding topologies).

---

*) because H is an open and dense subset of $X \times X$.

REFERENCES

1. Bourbaki, N. : General topology (russ.), ch. IX. Moscow, 1975.

2. Brook, R. B. : A construction of the greatest ambit., Math. Systems Theory, 4 (1970) p. 243–248.

3. Vries, J. de : Universal topological transformation groups, General Top. and its Applic., 5 (1975), p. 107–122.

4. Vries, J. de : Topological transformation groups, I., Mathematical Centre Tracts Nr 65' Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

Tom 24 (38) Fascicola 2—1979

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

OPERATORI DE DERIVARE ŞI CIMPURI DE VECTORI PE VARIETĂŢI DIFERENŢIABILE

DE

F. RADU

Definiţia 1. Fie $F(I, R)$ şi $F(J, R)$, R — algebrele funcţiilor reale (de o variabilă reală) definite respectiv pe I şi J, $S : F(I, R) \to F(J, R)$ un homomorfism de spaţii liniare (de algebre uneori) şi funcţia reală $h : I \to J$, $f \in F(I, R)$ este o funcţie reală derivabilă în $x_0 \in I$ relativ la homomorfismul $S : F(I, R) \to F(J, R)$ şi la funcţia reală $h : I \to J$ dacă $S(f) : J \to R$ este o funcţie reală derivabilă în $y_0 = h(x_0)$

Definiţia 2. Fie $F(I, R)$ şi $F(J, R)$, R — algebrele funcţiilor reale (de o variabilă reală) definite respectiv pe I şi J $f \in F(I, R)$ este o funcţie reală derivabilă pe I relativ la homomorfismul de spaţii liniare $S : F(I, R) \to F(J, R)$ dacă $S(f) \in F(J, R)$ este o funcţie reală derivabilă pe J.

Derivata funcţiei reale $S(f)$ se va numi derivata funcţiei $f : I \to R$ relativ la $S : F(I, R) \to F(J, R)$

Observaţia 1. Dacă $F'(J, R)$ este mulţimea funcţiilor reale derivabile pe J atunci $S^{-1}(F'(J, R) \cap S(F(I, R))$ este mulţimea funcţiilor reale derivabile pe I relativ la homomorfismul liniar $S : F(I, R) \to F(J, R)$ şi vom nota cu $\tilde{s}$: $: F'_s(I, R) \to F'(J, R)$ restricţia aplicaţiei $S : F(I, R) \to F(J, R)$ relativ la $F'_s(I, R) = S^{-1}(F'(J, R) \cap S(F(I, R))$

Propoziţia 1. Dacă $D : F'(J, R) \to F(J, R)$ este aplicaţia de derivare (a funcţiilor reale definite pe J) atunci definiţia 2 induce un homomorfism de spaţii liniare $D_s = F(I, R) \to F'_s(J, R)$ unde $D_s = D \circ \tilde{s}$

Dacă $S : F'(I, R) \to F(J, R)$ este un homomorfism de algebre atunci $D_s(fg) = = D_s(f)\,\tilde{s}(g) + \tilde{s}(f)\,D_s(g)$

Definiţia 3. Fie $F(I, R)$, R — algebra funcţiilor reale definite pe I, $F^*(I, R)$, spaţiul liniar dual al spaţiului liniar $F(I, R)$. Se numeşte secţiune în $F(I, R)$ cu valori reale o aplicaţie $s : I \to F^*(I, R)$
(Vom folosi notaţia s_x pentru $s(x)$), deci $s_x \in F^*(I, R)$).

Observaţia 2. O secţiune în $F(I, R)$ cu valori reale $s : I \to F^*(I, R)$ induce un homomorfism de spaţii liniare $S : F(I, R) \to F(I, R)$ unde $S(f) : I \to R$ este funcţia reală definită astfel

$$S(f)(x) = s_x(f)$$

Derivabilitatea funcţiilor în raport cu $S : F(I, R) \to F(I, R)$ se va numi derivabilitatea funcţiilor în raport cu $s : I \to F^*(I, R)$

Exemplul 1. Funcţia reală $h : I \to R$ induce homomorfismul de spaţii liniare $S : F(I, R) \to F(I, R)$ definit astfel $S(f) = h \cdot f$ şi secţiunea în $F(I, R)$ cu valori reale determinată astfel $s_x : F(I, R) \to R$ este aplicaţia definită astfel $s_x(f) = h(x) f(x)$ (care este o formă liniară). Derivata funcţiei $f : I \to R$ în raport cu $S : F(I, R) \to F(I, R)$ este funcţia $S(f)' = h' \cdot f'$ dacă presupunem că $h : I \to R$ şi $f : I \to R$ sînt derivabile pe I.

Exemplul 2. Funcţia reală bijectivă $h : J \to I$ induce homomorfismul de algebre $S : F(I, R) \to F(J, R)$ definit astfel $S(f) = f \circ h$ şi secţiunea $s : I \to F^*(I, R)$ determinată astfel : $s_x : F(I, R) \to R$ este aplicaţia definită astfel : $s_x(f) = (f \circ h)(J)$, $J = h^{-1}(x)$ care evident este o formă liniară. Secţiunea $s : I \to F^*(I, R)$ induce aplicaţia $S_1 : F(I, R) \to F(I, R)$ ($S_1(f) : I \to R$ fiind funcţia reală definită astfel : $S_1(f)(x) = s_x(f)$) care este aplicaţia identică deoarece $S_1(f)(x) = s_x(f) = (f \circ h)(J) = (f \circ h) h^{-1}(x) = f(x)$ şi deci $S_1(f) = f$.

Dacă $h : J \to I$ este o funcţie derivabilă pe J, $f : I \to R$ derivabilă pe I, atunci $D_s^-(f) = D_s^-(f)) = D(f \circ h) = (f' \circ h) \cdot h' = S(f') \cdot h'$

Exemplu 3. Fie $F_p(I, R)$, R – algebra funcţiilor reale c^p – diferenţiabile pe I. Difeomorfismul c^p – diferenţiabil $h : J \to I$ şi $u \in R$ induc homomorfismul ce spaţii liniare $S : F_p(I, R) \to F(J, R)$ determinat astfel : $S(f) : I \to R$ este funcţia reală definită astfel : $S(f)(y) = d_y(f \circ h)(u)$ adică $S(f)$ este compunerea aplicaţiilor $d(f \circ h) : J \to L(R, R)$ şi $G : L(R, R) \to R$, $G(A) = A(u)$, $\forall A \in L(R, R)$ (Se constată uşor că $S(af + bg) = aS(f) + bS(g)$, $\forall a, b \in R$,

Difeomorfismul $h : J \to I$ şi $u \in R$ induc şi secţiunea în $F_p(I, R)$, $s : I \to F_h^*(I, R)$ unde $s_x^h : F_p(I, R) \to R$ este aplicaţia definită astfel : $s_x^h(f) = d_y(f \circ h)(u)$ care satisface proprietatea $s_x^h(af + bg) = as_x^h(f) + bs_x^h(g)$ şi deci $s_x^h \in F_p^*(I, R)$

Propoziţia 2. Homomorfismul de spaţii liniare $S : F_p(I, R) \to F(J, R)$ şi secţiunea $s^h : I \to F(I, R)$ induse (în sensul exemplului 3) de difeomorfismul $h : J \to I$ şi $u \in R$ satisfac proprietăţile :

$$S(f \cdot g) = S(f) \cdot g \circ h + f \circ h S(g)$$

$$s_x^h(f \cdot g) = f(x) s_x^h(g) + s_x^h(f)\ g(x),\ \forall f,\ g \in F_p(I, R)$$

Propoziţia 3. Fie c^p – difeomorfismele $h_i : J \to I$; $i = 1, 2$ şi $u_1, u_2 \in R$. Dacă $d_{y_1}(h_2^{-1} \circ h_1)(u_1) = u_2$, $y_1 = h_2^{-1}(x)$ atunci $s_x^{h_1} = s_x^{h_2}$ şi reciproc.

Demonstraţie. a) Fie $y_i = h_i^{-1}(x)$, $i = 1, 2$. Dacă presupunem că $d_{y1}(h_2^{-1} \circ h_1)(u_1) = u_2$ atunci $s_x^{h_1}(f) = d_{y_1}(f \circ h_1)(u_1) = d_{y_1}(f \circ h_2 \circ h_2^{-1} \circ h_1)(u_1) = d_{y_2}(f \circ h_2) \circ d_{y1}(h_2^{-1} \circ h_1)(u_1) = d_{y2}(f \circ h_2)(u_2) = s_x^{h_2}(f)$

b) Dacă $s_x^{h_1}(f) = s_x^{h_2}(f)$, $\forall f \in F(I, R)$ atunci $s_x^{h_1}(h_2^{-1}) = s_x^{h_2}(h_2^{-1})$ şi deci $d_{y_1}(h_2^{-1} \circ h_1)(u_1) = d_{y_2}(h_2^{-1} \circ h_2)(u_2) = u_2$ (deoarece $h_2^{-1} \circ h_2 : J \to J$ este aplicaţia identică)

Fie M o varietate C^p – diferenţiabilă (n – dimensională), U un deschis de hartă locală, $F_p(U, R)$, R – algebra funcţiilor reale c^p – diferenţiabile definite pe deschisul U, $F(I, R)$, R – algebra funcţiilor reale de o variabilă reală ($o \in I$) şi aplicaţia

$s : U \to L(F_p(U, R), F(I, R))$ o secţiune în $F_p(U, R)$ cu valori în $F(I, R)$)

Definiţia 4. Funcţia $f : U \to R \in F_p(U, R)$ este derivabilă în $x \in U$ în raport cu secţiunea $s : U \to L(F_p(U, R), F(I, R))$ dacă $s_x(f) : I \to R$ este o funcţie reală (de o variabilă reală) derivabilă în zero.

Funcția reală $F: U \to R \in F(U, R)$ definită astfel $F(x) = s_x(f)'(0)$ se numește derivata funcției $f: U \to R$ în x relativ la secțiunea $s: U \to L(F_p(U, R), F(I, R))$

Observația 3. Fie (U, φ) o hartă locală, $f: U \to R \in F(U, R)$ este c^p – diferențiabilă dacă $f: U \to R$ este c^p – diferențiabilă în raport cu homomorfismul de algebre $S: F(U, R) \to F(\varphi(U), R)$ $\varphi(U) \subset R^n$ indus de harta locală $\varphi: U \to \varphi(U) \subset R^n$, adică definit astfel $S(f) = f \circ \varphi^{-1}$

Propoziția 4. Fiind dat cîmpul de vectori X (o secțiune în fibratul tangent al varietății diferențiale M) există o secțiune $s: U \to L(F_p(U, R), F(I, R))$ astfel încît derivata Lie a funcției $f: U \to R$ este derivata funcției $f: U \to R$ în raport cu secțiunea $s: U \to L(F_p(U, R), F(I, R))$, $I \subset R$

Demonstrație. Fie $g: I \times U \to M$ fluxul local indus de cîmpul de vectori $X: U \to T(M)$, $g_x: I \to M$ fiind curba integrală a cîmpului de vectori X cu condiția inițială $x \in M$

Definim secțiunea $s: U \to L(F_p(U, R), F(I, R))$ astfel $s_x(f) = f \circ g_x$

Dacă $F: U \to R$ este derivata funcției $f: U \to R$ în raport cu $s: U \to L(F_p$

$(U, R), F(I, R))$ atunci $F(x) = s_x(f)'(x) = \lim_0 \frac{s_x(f)(t) - s_x(f)(0)}{t} =$

$$= \lim \frac{(f \circ g_x)(t) - (f \circ g_x)(0)}{t} = \lim \frac{(f \circ g_t)(x) - f(0)}{t} = (L_x f)(x)$$ și deci $F = L_x f$

Fie X un cîmp de vectori pe varietatea diferențiabilă M, (U, φ) o hartă locală și $g: I \times U \to U'$ grupul local cu un parametru definit de cîmpul X (relativ la U) $g_t: U \to U'$, fiind un difeomorfism și $G_t = \varphi \circ g_t \circ \varphi^{-1}$ reprezentarea analitică a difeomorfismului în raport cu (U, φ).

$G: I \times V \to V'$ induce aplicațiile diferențiabile $g^i \div I \times V \to R$ astfel încît $G(s(t, x, \ldots, x^n) = (g^1(t, x^1, \ldots, x^n), g^2(t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(t, x^1, \ldots, x^n))$ sau $G_t(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (g^1_t(x^1, \ldots, x^n), g^2_t(x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n_t(x^1, \ldots, x^n))$

Dacă $x \in U$ și $\varphi(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ atunci aplicația $g_x: I \to M$ definită astfel $g_x(t) = g(t, x)$ este o curbă integrală cu condiția inițială x și deci funcțiile $g^i_x: I \to R$ definite astfel $g^i_x(t) = g^i(t, x^1, \ldots, x^p)$, $i = 1, \ldots, n$ constituie soluția ecuației diferențiale $\frac{dx^i}{dt} = X^i$ cu condiția inițială $g^i_x(0) = x$ $(g_x(0) = x)$

Rezultă că $\frac{\partial g^i}{\partial t}(t, x^1, \ldots, x^n) = X(g^1(t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(t, x^1, \ldots, x^n))$

$X = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ fiind reprezentarea analitică a cîmpului de vectori X în raport cu harta (U, φ).

Fie Y un alt cîmp de vectori avînd reprezentarea analitică $Y = Y^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ în raport cu harta locală (U, φ) atunci derivata *Lie* a cîmpului Y în raport cu cîmpul X este cîmpul de vectori $L_X Y$ definit astfel:

$$(L_X Y)_x = \lim_0 \frac{Y_x - (g^x_t)_x}{t} = \lim_0 \frac{Y_x - dg_{ty} Y_y}{t}, \quad y = g_t^{-1}(x) = g(-t, x)$$

Matricea operatorului liniar dg_{ty} în raport cu baza canonică $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ fiind

$$\left(\frac{\partial g^i_t}{\partial x^i}(y^1, \ldots, y^n)\right), \quad i, j = 1, \ldots n, \quad y^i = g^i(-t, x', \ldots, x^n)$$

Rezultă deci :

$$(L_X Y)^i_x = \lim_o \frac{y^i(x^1, \ldots x^n) - \frac{\partial g^i_t}{\partial x^j}(g^1(-t, x^1, \ldots x^n), \ldots, g^n(-t, x^1, \ldots, x^n))\ y^i}{t} -$$

$$- \frac{(g^1(-t, x^1, \ldots x^n), \ldots, g^n(-t, x^1 \ldots x^n))}{t}$$

Definind funcţiile reale $\Phi^i_x : I \to R$, $i = 1, 2, \ldots, n$ astfel $(\Phi^i_x)(t) = \frac{\partial g^i}{\partial x^a}(t, g^1(-t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(-t, x^1, \ldots, x^n)\ Y^i(g^1(-t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n, (-t, x^1, \ldots, x^n))$ şi ţinînd cont că $\Phi^i_x(0) = Y^i(x^1, \ldots, x^n$; $g^i_x(0) = x^i$ şi deci $\frac{\partial g^i}{\partial x^j}(0, x^1,) \ldots, x^n) = S^i_j$ şi că deci $\frac{\partial g}{\partial t}(t, x^1, \ldots, x^n) = x^i(g^1(t, x^1, \ldots, x^n), \ldots$ $\ldots, g^n(t, x^1, \ldots, x^n$ rezultă : $(L_x Y)^i_x = -(\Phi^i_x)'(0)$ şi deoarece $(\Phi^i_x)'(t) = \left[\frac{\partial^2 g^i}{\partial t \partial x^j} \cdot (t, g^1(t-, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(t-, x^1, \ldots, x^n)) - \frac{\partial^2 g^i}{\partial x^i \partial x^k}(t, g^1(-t, x^1, \ldots, x^a ., g^n(-t, x^1, \ldots, x^n)) \frac{\partial g^k}{\partial t}(t, x^1, \ldots, x^n)\right] Y^j(g^1(-t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(-t, x^1, \ldots, x^n)) - \frac{\partial g^i}{\partial x^k}(t, g^1(-t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(-t, x^1, \ldots x^n)) \frac{\partial g^k}{\partial t}(t, x^1, \ldots, x^n)$

În concluzie

$$(\Phi^i_x)(0) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x^1, \ldots, x^n)\ Y^j(x^1, \ldots, x^n) - X^j(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x^1, \ldots x^n) =$$

$$= -[X, Y]^i_x$$

Observaţia 4. Dacă $g : I \times U \to U'$ este grupul local cu un parametru indus de cîmpul X relativ la U atunci putem defini secţiunile $s : U \to L(F_p(U, R), F(I, R)$ astfel : $s^i_x(f) = \frac{\partial g^i}{\partial x^j}(t, g^1(-t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(-t, x^1, \ldots, x^n))$ $\cdot (f \circ \varphi^{-1})(g^1(-t, x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(-t, x^1, \ldots, x^n))$

Dacă $Y = Y^i \left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ este reprezentarea analitică a cîmpului Y relativ la harta locală (U, φ) atunci $s^i_x(Y) = \Phi^i_x$

În concluzie $(L\ Y)^i_x$ este derivata în x a funcţiei Y^i relativ la secţiunea s^i.

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghiev Gh., Oproiu V : Geometrie diferenţială, Ed. Dip. ped. Bucureşti, 1977
2. Miron R : Introducere în geometria diferenţială, Univ. Iaşi 1972
3. Pham Man Quan : Introduction à la géométrie des variétés différentiables, Dunod, Paris 1969

LES OPERATEURS DES DERIVATION ET CHAMPS DES VECTEURS SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

RÉSUMÉ

On introduire la notion de derivée par rapport avee une section „s“

On lémonter que la dérivée de *Lie* de la fontion réelle $f : U \quad M \to R$ et la dérivée de *Lie* d'une champ des vecteurs sur la varieté differenţiable M sont dérivees en rapport avec la section s.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

ON AN INEQUALITY OF T. POPOVICIU II

BY

JOSIP E. PEČARIĆ

The generalization of the inequality of T. POPOVICIU [2] and some analogous results are given in the paper [1]. We shall give the generalization of results from [1] in the present paper. Let us denote :

$$F(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_m=1}^{n_m} x_{i_1 \ldots i_m} a_{1 i_1} \ldots a_{m i_m},$$

$$G(f_1, \ldots, f_m) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_m}^{b_m} p(x_1, \ldots, x_m) f_1(x_1) \ldots f_m(x_m) \, dx_1 \ldots dx_m,$$

$$X_{s_1 \ldots s_m} = \sum_{i_1=s_1}^{n_1} \ldots \sum_{i_m=s_m}^{n_m} x_{i_1 \ldots i_m},$$

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \int_{x_1}^{b_1} \ldots \int_{x_m}^{b_m} p(x_1, \ldots, x_m) \, dx_1 \ldots dx_m.$$

Then

$$(1) \qquad F(a_1, \ldots, a_m) = a_{11} \ldots a_{m1} X_{1 \ldots 1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \sum \binom{m}{k} \left\{ a_{11} \ldots a_{k1} \sum_{s_{k+1}=2}^{n_{k+1}} \ldots \sum_{s_m=2}^{n_m} X_{1, \ldots, 1, s_{k+1}, \ldots, s_m} \prod_{j=k+1}^{m} (a_{j, s_j} - a_{j, s_{j-1}}) \right\} + \sum_{s_1=2}^{n_1} \ldots \sum_{s_m=2}^{n_m} X_{s_1 \ldots s_m} \prod_{j=1}^{m} (a_{j, s_j} - a_{j, s_{j-1}});$$

$$(2) \qquad G(f_1, \ldots, f_m) = f_1(a_1) \ldots f_m(a_m) \, P(a_1, \ldots, a_m) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \sum \binom{m}{k} \left\{ f_1(a_1) \ldots f_k(a_k) \int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \ldots \int_{a_m}^{b_m} P(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) \, df_{k+1}(x_{k+1}) \ldots df_m(x_m) \right\} + \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_m}^{b_m} P(x_1, \ldots, x_m) \, df_1(x_1) \ldots df_m(x_m);$$

where $\sum_{(k)}^{(m)} \{\cdot\}$ denotes the sum of all the combinations of class k of $a_{11}, \ldots, a_{m1}$ or of $f_1(a_1), \ldots, f_m(a_m)$.

In proof of the identity (1) we shall use the mathematical induction method. For m=1, from (1), we obtain the well-known ABEL's identity. Suppose that (1) is valid for m. Let be m=m+1 and denote

$$X'_{i_{m+1}} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_m=1}^{n_m} x_{i_1 \ldots i_m i_{m+1}} a_{1i_1} \ldots a_{mi_m}. \tag{3}$$

Then

$$F(a_1, \ldots, a_{m+1}) = \sum_{i_{m+1}=1}^{n_{m+1}} X'_{i_{m+1}} a_{m+1,\, i_{m+1}} = a_{m+1,1} \sum_{i_{m+1}=1}^{n_{m+1}} X'_{i_{m+1}} + \tag{4}$$

$$+ \sum_{s_{m+1}=2}^{n_{m+1}} \Big(\sum_{i_{m+1}=s_{m+1}}^{n_{m+1}} X'_{i_{m+1}} \Big) (a_{m+1, i_{m+1}} - a_{m+1, i_{m+1}-1}).$$

If we apply (1) on (3), then from (4) we get (1) for $m=m+1$.

The proof of identity (2) is similar.

Using (1) and (2) by complete analogy with the proofs from the paper [1], we can obtain the following results:

THEOREM 1. Let $x_{i_1 \ldots i_m}$ $(i_k=1, \ldots, n_k;\ k=1, \ldots, m)$ be real numbers.

(*a*) For all nondecreasing sequences $a_j=(a_{j1}, \ldots, a_{jn_j})$ $(j=1, \ldots, m)$ $F(a_1, \ldots, a_m) \geqq 0$, if and only if

$$X_{s_1 \ldots s_m} \geqq 0 \quad (s_j=2, \ldots, n_j;\ j=1, \ldots, m)$$

$$X_{s_1, \ldots, s_{k-1}, 1, s_{k+1}, \ldots, s_m} = 0 \quad (s_j=1, \ldots, n_j;\ j=1, \ldots, k-1,$$

$$k+1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, m).$$

(*b*) For all nonnegative nondecreasing sequences a_j $(j=1, \ldots, m)$, $F(a_1, \ldots, a_m) \geqq 0$ if only if

$$X_{s_1, \ldots, s_m} \geqq 0 \text{ şi } (s_j=1, \ldots, n_j;\ j=1, \ldots, m).$$

THEOREM 2. (a) For all nondecreasing function f_j $(j=1, \ldots, m)$, $G(f_1, \ldots, f_m) \geqq 0$ if and only if

$$P(x_1, \ldots, x_m) \geqq 0 \quad (\forall x_j \in (a_j, b_j];\ j=1, \ldots, m),$$

$$P(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) = 0 \quad (\forall x_j \in [a_j, b_j],\ j=1, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots$$

$$\ldots, m;\ k=1, \ldots, m).$$

(*b*) For all nonnegative nondecreasing functions f_j $(j=1, \ldots, m)$, $G(f_1, \ldots, f_m) \geqq 0$ if and only if

$$P(x_1, \ldots, x_m) \geqq 0 \quad (\forall x_j \in [a_j, b_j],\ j=1, \ldots, m).$$

THEOREM 3. Let a_j $(j=1, \ldots, m)$ be nonnegative nondecreasing sequences. Then

$$a_{1n_1} \ldots a_{mn_m} \min_{\substack{1 \leqq s_j \leqq n_j \\ j=1, \ldots, m}} X_{s_1, \ldots, s_m} \leqq F(a_1, \ldots, a_m) \leqq a_{1n_1, \ldots, a_{mn_m}} \max_{\substack{1 \leqq s_j \leqq n_j \\ j=1, \ldots, m}} X_{s_1, \ldots, s_m}.$$

THEOREM 4. Let f_j $(j=1, \ldots, m)$ be nonnegative nondecreasing functions. Then

$$f_1(b_1) \ldots f_m(b_m) \min_{\substack{a_j \leqq x_j \leqq b_j \\ j=1,\ldots,m}} P(x_1, \ldots, x_m) \leqq G(f_1, \ldots, f_m) \leqq f_1(b_1) \ldots f_m(b_m)$$

$$\max_{\substack{a_j \leqq x_j \leqq b_j \\ j=1,\ldots,m}} P(x_1, \ldots, x_m)$$

THEOREM 5. Let a_j $(j=1, \ldots, m)$ be monotonous sequences. Then

$$|F(a_1, \ldots, a_m)| \leqq \max_{\substack{1 \leqq s_j \leqq n_j \\ j=1,\ldots,m}} |X_{s_1,\ldots,s_m}| \prod_{j=1}^{m} (|a_{j1}| + |a_{jn_j} - a_{j1}|).$$

COROLLARY 1. Let a_j $(j=1, \ldots, m)$ be monotonous sequences such that $a_{j1}a_{jn_j} \geqq 0$, $|a_{jn_j}| \geqq |a_{j1}|$. Then

$$|F(a_1, \ldots, a_m)| \leqq |a_{1n}| \ldots |a_{mn_m}| \max_{\substack{1 \leqq s_j \leqq n_j \\ j=1,\ldots,m}} |X_{s_1,\ldots,s_m}|.$$

THEOREM 6. Let f_j $(j=1, \ldots, m)$ be monotonous functions. Then

$$|G(f_1, \ldots, f_m)| \leqq \max_{\substack{a_j \leqq x_j \leqq b_j \\ j=1,\ldots,m}} |P(x_1, \ldots, x_m)| \prod_{j=1}^{m} (|f_j(a_j)| + |f_j(b_j) - f_j(a_j)|).$$

COROLLARY 2. Let f_j $(j=1, \ldots, m)$ be monotonous functions, such that $f_j(a_j) f_j(b_j) \geqq 0$, $|f_j(b_j)| \geqq |f_j(a_j)|$, then

$$|G(f_1, \ldots, f_m)| \leqq |f_1(b_1)| \ldots |f_m(b_m)| \max_{\substack{a_j \leqq x_j \leqq b_j \\ j=1,\ldots,m}} |P(x_1, \ldots, x_m)|.$$

THEOREM 7. Let a_j $(j=1, \ldots, m)$ be monotonous sequences. If

$$X_{s_1,\ldots,s_{k-1},1,s_{k+1},\ldots,s_m} = 0 \quad (s_j = 1, \ldots, n_j, \ j=1, \ldots, k-1, \ k+1, \ldots, m;$$

$$k=1, \ldots, m), \text{ then}$$

$$|F(a_1, \ldots, a_m)| \leqq \max_{\substack{1 \leqq s_j \leqq n_j \\ j=1,\ldots,m}} X_{s_1,\ldots,s_m} \left| \prod_{j=1}^{m} a_{jn_j} - a_{j1} \right|.$$

THEOREM 8. Let f_j $(j=1, \ldots, m)$ be monotonous functions. If

$$P(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) = 0 \quad (\forall x_j \in [a_j, b_j], \ j=1, \ldots, k-1, \ k+1, \ldots, m; \ k=1, \ldots, m), \text{ then}$$

$$|G(f_1, \ldots, f_m)| \leqq \max_{\substack{a \leqq x_j \leqq b_j \\ j=1,\ldots,m}} |P(x_1, \ldots, x_m)| \prod_{j=1}^{m} |f_j(b_j) - f_j(a_j)|.$$

REFERENCES

1. J.E. Pečarić: On an inequality of T. Popoviciu. Bul. Sti. Tehn. Inst. Politehnic. Timişoara (in print).
2. T. Popoviciu: On an inequality (Romanian). Gaz. Mat. Fiz. A 8 (64) (1959), 451–461.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

Tom 24 (38) Fascicola 2—1979

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

STRUCTURI DIFERENŢIABILE PE SPAŢII METRICE CONVEXE II

DE

DORINA RENDI şi BELA RENDI

II. STRUCTURA DIFERENŢIABILĂ

În lucrarea [7] s-a arătat că vecinătăţile standard $V(x_0, \varepsilon)=\{x \mid x \in M, \rho(x, x_0)<\varepsilon\}$ sînt izometrice cu sfera de rază ε din spaţiul Banach B (construit în [7]), unde M este un spaţiu metric convex în sensul lui Menger, cu vecinătăţi standard şi verificînd condiţia de omogeneitate din [7]. Pentru orice $x_0 \in M$ avem vecinătatea standard $V_{x_0}=V(x_0, \varepsilon)$ şi izometria h_{x_0} ; $V_{x_0} \to D \subset B$ unde D este disocul de rază ε din B.

Perechile (V_{x_0}, h_{x_0}) le privim ca hărţi locale pentru M. Cu aceasta definim pentru moment o structură de varietate topologică pe M, căci este evident, că schimbările de hartă sînt aplicaţii continue. În continuare vom arăta că de fapt avem o structură diferenţiabilă de clasă C^∞ pe M. Fie pentru aceasta V_{x_1}, V_{x_2} vecinătăţi standard şi $V_{x_1} \cap V_{x_2} \neq \Phi$. Avem şi izometriile h_{x_1} : $V_{x_1} \to D_1$, h_{x_2}; $V_{x_2} \to D_2$ şi deci izometria :

$$h : h_{x_1}(V_{x_1} \cap V_{x_1}) \to h_{x_2}(V_{x_1} \cap V_{x_2})$$

unde

$$h=h_{x_2} \circ h_{x_1}^{-1}$$

Notăm

$$U_1 \subset B, \quad U_1=h_{x_1}(V_{x_1} \cap V_{x_2})$$

$$U_2 \subset B, \quad U_2=h_{x_2}(V_{x_1} \cap V_{x_2})$$

Avem izometria $h : U_1 \to U_2$, U_1, U_2 submulţimi deschise.

Ţinînd seama de faptul că translaţiile sînt izometrii, putem construi izometria

$$\overline{h} : \overline{U_1} \to \overline{U_2}$$

unde

$$\overline{U_1}=\{u-h_{x_1}(x) \mid u \in U_1\}$$

$$\overline{U_2}=\{u-h_{x_2}(x) \mid u \in U_2\}$$

iar

$$\overline{h}(u-h_{x_1}(x))=h(u)-h_{x_2}(x)$$

x — fiind un element fixat din $V_{x_1} \cap V_x$

Se vede că $\overline{h}(O_B)=O_B$, $O_B \in B$ elementul nul.

Deoarece $\overline{U_1}$ este o mulţime deschisă din B şi $O_B \in U_1$ există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta>0$ astfel încît $D_\varepsilon \subset \overline{U_1}$, $D_\varepsilon=\{X \mid X \in B, \| X \|<\delta\}$, h fiind o izometrie $h(D_\varepsilon)=D_\varepsilon$. Ţinînd seama de Propoziţiile 1 şi 2 din [7] rezultă următoarea afirmaţie :

Propoziția 3. Aplicația $\bar{h}/D_\varepsilon : D_\varepsilon \to D_\varepsilon$ este restricția unei aplicații liniare $T : B \to B$, în plus T fiind și o izometrie, deci și izomorfism de spații Banach.

Demonstrație Trebuie să-l definim pe $T : B \to B$. Fie $x \in B$ și fie $\alpha = \frac{\varepsilon}{\|x\|+1}$ Evident $\alpha x \in D_\varepsilon$.

Prin definiție se ia $T(x) = \frac{1}{\alpha} \bar{h}(\alpha x)$. Se verifică ușor că toate afirmațiile din propoziția 3 au loc.

Propoziția 4. Hărțile locale (V_{x_0}, h_{x_0}) definesc o structură de varietate diferențiabilă de clasă C^∞ pe M.

Demonstrație. Afirmația propoziției 4 rezultă imediat din construcția lui $\bar{h}$ în baza propoziției 3. Avem din construcție

$$h(u) = \bar{h}(u - h_{x_1}(x)) + h_{x_2}(x).$$

unde $\bar{h}$ este restricția unei aplicații liniare care este și izometrie, deci continuă și diferențiabilă de clasă C^∞. Cum orice translație este de clasă C^∞ rezultă că h este de clasă C^∞.

Observație. În structura diferențială construită schimbările de coordonate sînt restricții de izometrii liniare, urmate de translații. Dacă considerăm cazul particular M varietate 1 — dimensională (curbă), atunci (V_{x_0}, h_{x_0}), $h_{x_0} : V_{x_0} \to \to (-a, b) \subset \mathbb{R}$ cu $h_{x_0}(x_0) = 0 \in \mathbb{R}$ ne definește tocmai parametrizarea locală a curbei după arcul curbei, $h_{x_0}^{-1}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in (-a, b)$. Astfel cu această structură diferențiabilă pe M am obținut o generalizare a noțiunii de parametrizare după arc.

În continuare observăm că pe orice varietate diferențiabilă de clasă C^∞ se poate defini o structură de varietate Riemann deci o metrică. Astfel orice varietate diferențiabilă de clasă C^∞ se poate înzestra cu o structură de clasă C^∞, schimbările de coordonate fiind izometrii liniare urmate eventual de translații.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff: Metric foundations of geometry, Trans. Amer. Math. Soc. 55, 465—492 1944.
2. H. Busemann: Metric methods in Finsler spaces in the foundations of geometry, Princeton, 1952.
3. H. Busemann: On spaces in wich two points determine a geodesic. Trans. Amer. Math. Soc. 54, 171—184, 1943
4. L. Blumenthal: Theory and applications of distance geometry, Oxford 1955
5. R. Pitchner, M. Smilley: Transitivites of betweennes. Trans. Amer. Math. Soc. 52, 95—127, 1942
6. B. Rendi: Structura algebrică a spațiilor metrice. Studia Univ. Babeș—Bolyai Cluj Series Math. Mec. Fasd. 1, 1970
7. B Rendi: Quelques proprietes des structures algebriques definis sur une espace metrique. Analele Univ. Timișoara vol. I. 1971
8. D. Rendi, B. Rendi: Structuri diferențiabile pe spații metrice convexe, I, Buletinul Inst. Politehnic fasc. 1, 1979.

DIFFERENTIABLE STRUCTURES SUR ESPACES METRIQUES CONVEXES II

RÉSUMÉ

Dans cette note pour une espace métrique (M, ρ) avec des proprétés de convexitée, omogèneitée les auteurs. construent une structure differentiable de classe C^∞. Les cartes locale dans cette structure sont les voisinagessstandards de M.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

Tom 24 (38) Fascicola 2—1979

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

GENERALIZED COMMUTATION AND ANTICOMMUTATION RELATIONS

BY

M. BORNEAS, M. DAVID, I. DAMIAN

1. **Introduction.** The commutation and anticommutation relations in quantum theory originate in the analogy with the classical Poisson brackets, according to the correspondence principle [1]. The problem of introducing commutators and anticommutators in the quantum theory arises also when this theory emerges from a classical theory with higher order derivatives. The commutation and anticommutation relations for the quantum field, within the general framework of a field theory with higher derivatives [2] have been presented for the frist time, with our knowledge, in Ref. [3]. They have been applied to the generalized canonical conjugate momenta built with a Lagrangian proposed by Fried and Plebanski [4], and have led to the same result as in the original paper [4].

In most quantum theory books the commutation and anticommutation relations are postulated, but there are some which use the method of Schwinger [5], starting from his form of the action principle.

In the present paper we derive the generalized commutation and anticommutation relations for quantum mechanics, and quantum field theory, with higher order derivatives, following the method of Schwinger.

2. **Generalized quantum mechanics.** The generalized quantum mechanics with higher order derivatives is based on the „classical“ (or rather non-quantum) generalized mechanics with higher derivatives [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13]. Koestler and Smith [14] were the first who wrote the generalized Poisson brackets. Hayes [15] postulates the commutation relations for the generalized momenta and coordinates in a special form. Tesser [16] and Krüger [17] also give their view on the commutators. Mušicki [13] presents an exhaustive discussion on the generalized Poisson brackets.

We start from the action principle with fixed limits in the form

$$\delta \int_1^2 d\xi L = 0 \tag{1}$$

which we consider as a fundamantal law of physical nature [18]. For mechanics eq. (1.) reads

$$\delta \int_1^2 dtL = 0 \tag{2}$$

and leads to the equation of motion [6]

$$\sum_k \sum_n (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial x_k^{(n)}} = 0. \tag{3}$$

If the most general variation of the action is performed [7] one obtains

$$\tilde{\delta} \int_1^2 dt\, L = \int_1^2 dt \sum_k \sum_n (-1)^n \left(\frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial x_k^{(n)}} \right) \delta_0 x_k + G\,; \tag{4}$$

$\tilde{\delta}$ indicates the general variation, $\delta_0 x_k$ is the intrinsic variation of the coordinates, and G represents the boundary terms. G may be written in the form [6] [7]

$$G = \sum_k \sum_{m=1}^{s} p_{k/m} \left(\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \tilde{\delta} x_k \right) - H \delta t$$

$$- \sum_k \sum_{m=2}^{s} p_{k/m} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left(\frac{dx_k}{dt} \delta t_{|0|} \right) \tag{5}$$

where

$$\delta x_k = \delta_0 x_k + \frac{dx_k}{dt} \delta t \tag{6}$$

$$p_{k/m} = \sum_{j=0}^{s-m} p_{k\,(mj)} = \sum_{j=0}^{s-m} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial x_k^{(m+j)}} \tag{7}$$

$$H = \sum_k \sum_{m=1}^{s} p_{k/m} \frac{d^m x_k}{dt^m} - L \tag{8}$$

and $\delta t_{|0|}$ indicates that the term with δt underivated is missing.

In view of (3) the most general variation of the action reduces to G, as the action principle in Schwinger's form states. Moreover G is the generator of an infinitesimal canonical transformation

$$\delta A = \frac{i}{\hbar} [G,\ A] \tag{9}$$

A being an operator.

Now we substitute in (9) $x_j^{(n)} = d^n x_j / dt^n$ for the operator A :

$$\delta x_j^{(n)} = \frac{i}{\hbar} [G,\ x_j^{(n)}[. \tag{10}$$

Keeping $\delta t=0$ one obtains from (5)

$$G=\sum_k \sum_{m=1}^{s} p_{k/m}\left(\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta x_k\right)$$

$$=\sum_k \sum_{l=0}^{s-1} p_{k/l+1}\left(\frac{d^l}{dt^l}\delta x_k\right) \tag{11}$$

with the new labeling, and (10) becomes

$$\delta x_j^{(n)}=\frac{i}{\hbar}\left[\sum_k \sum_{l=0}^{s-1} p_{k/l+1}\left(\frac{d^l}{dt^l}\delta x_k\right),\ x_j^{(n)}\right]. \tag{12}$$

Changing the sing, putting the summation symbol outside the bracket, and bearing in mind [7]

$$\delta\frac{d^i x_k}{dt^i}=\frac{d^i}{dt^i}\delta x_k-\frac{d^i}{dt^i}\left(\frac{dx_k}{dt}\delta t\right)+\frac{d^{i+1}x_k}{dt^{i+1}}\delta t \tag{13}$$

with $\delta t=0$, one can write

$$\delta x_j^{(n)}=-\sum_k \sum_{l=0}^{s-1}\frac{i}{\hbar}[x_j^{(n)},\ p_{k/l+1}\,\delta x_k^{(l)}]. \tag{14}$$

Since the identity

$$[A,\ BC]=[A,\ B]C+B\,[A\ ,C] \tag{15}$$

holds for any three operators, equation (14) can be put in the form

$$\delta x_j^{(n)}=-\sum_k \sum_{l=0}^{s-1}\frac{i}{\hbar}[x_j^{(n)},\ p_{k/l+1}]\,\delta x_k^{(l)}$$

$$-\sum_k \sum_{l=0}^{s-1}\frac{i}{\hbar}p_{k/l+1}[x_j^{(n)},\ \delta x_k^{(l)}]. \tag{16}$$

This equation is satisfied if

$$[x_j^{(n)},\ p_{k/l+1}]=i\hbar\delta_{jk}\delta_{ln} \tag{17}$$

and

$$[x_j^{(n)},\ \delta x_k^{(l)}]=0. \tag{18}$$

Similarly, if in (9) we replace the operator A by $p_{j/m+1}$, then we write

$$\delta p_{j/m+1}=\frac{i}{\hbar}[G,\ p_{j/m+1}]$$

$$=\frac{i}{\hbar}\left[\sum_k \sum_{l=0}^{s-1} p_{k/l+1}\left(\frac{d^l}{dt^l}\delta x_k\right),\ p_{j/m+1}\right]. \tag{19}$$

Performing the same operations as before one obtains

$$\delta p_{j/l+1} = -\sum_k \sum_{l=0}^{s-1} \frac{i}{\hbar} [p_{j/m+1},\ p_{k/l+1}]\, \delta x_k^{(l)}$$

$$-\sum_k \sum_{l=0}^{s-1} \frac{i}{\hbar} p_{k/l+1} [p_{j/m+1},\ \delta x_k^{(l)}] = 0, \tag{20}$$

as only variations of the coordinates are considered. $\delta x_j^{(n)}$ being arbitrary, one can set

$$\delta x_k^{(n)} = \varepsilon x_k^{(n)}, \tag{21}$$

and (18) leads to the commutation relation

$$[x_j^{(n)},\ x_k^{(l)}] = 0. \tag{22}$$

On the other hand, in view of (17) equation (20) reads

$$\sum_k \sum_{l=0}^{s-1} \frac{i}{\hbar} [p_{j/m+1},\ p_{k/l+1}]\ \delta x_k^{(l)} + \sum_k \sum_{l=0}^{s-1} \frac{i}{\hbar} p_{k/l+1} [p_{j/m+1},\ \varepsilon x_k^{(l)}]$$

$$= \sum_k \sum_{l=0}^{s-1} \frac{i}{\hbar} [p_{j/m+1},\ p_{k/l+1}]\, \delta x_k^{(l)} + \sum_k \sum_{l=0}^{s-1} \frac{i}{\hbar} p_{k/l+1}\, \varepsilon\, (-1 h \delta_{jk} \delta_{lm})$$

$$= \sum_k \sum_{l=0}^{s-1} \frac{i}{\hbar} [p_{j/m+1},\ p_{k/l+1}]\ \delta x_k^{(l)} + \varepsilon p_{j/m+1} = 0. \tag{23}$$

Since $p_{j/m+1}\psi$ must be zero for any state, from (23) results

$$[p_{j/m},\ p_{k/n}] = 0. \tag{24}$$

3. **Generalized quantum field theory.** The commutation and anticommutation relations derived from Schwinger's action principle, within the framework of a quantum dynamics of higher-derivative fields, have been successfully obtained by Riewe and Greene [19].

In the present paper we shall apply the method used with the generalized quantum mechanics. Thus we have the action principle

$$\delta \int_1^2 dx\, L = 0 \tag{25}$$

($dx = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$, $x_4 = \mathrm{ict}$) wherefrom

$$\sum_n \sum_\lambda \sum_\mu \ldots (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x_\lambda\, \partial x_\mu \ldots} \frac{\partial L}{\partial (\partial^n q_f / \partial x_\lambda\, \partial x_\mu \ldots)} = 0. \tag{26}$$

If the most general variation of the action is performed one obtains [7]

$$\tilde{\delta}\int_{\mathfrak{D}} dx\ L = \int_{\mathfrak{D}} dx \sum_f \sum_n \sum_\lambda \dots (-1)^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x_\lambda \dots} \frac{\partial L}{\partial (\partial^n q_f/\partial x_\lambda \dots)} \right) \delta_0 q_f$$

$$+ \int_{\mathfrak{D}} dx \sum_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left[\sum_f \sum_{n=1}^{s} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_\lambda \dots \sum_{\lambda+j-1} \sum_{\lambda+j+1=\upsilon} \dots (-1)^j \left(\frac{\partial^j}{\partial x_\lambda \dots} \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{\partial L}{\partial(\partial^n q_f/\partial x_\lambda \dots \partial x_{(\lambda+j)=\rho} \dots)} \right) \times \frac{\partial^{n-j-1}}{\partial x_\nu \dots} \left(\delta q_f - \sum_\pi \frac{\partial q_f}{\partial x_\pi} \right) \right. \tag{27}$$

where the second integral represents the boundary terms. According to (26) the general variation (27) reduces to these terms, which with the help of the generalized Gauss-Ostrogradsky theorem can be written

$$G(\sigma) = \sum_\rho \oint d\sigma_\rho \left[\sum_f \sum_{n=1}^{s} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_\lambda \dots \sum_{\lambda+j-1} \sum_\nu \dots (-1)^j \left(\frac{\partial^j}{\partial x_\lambda \dots} \frac{\partial L}{\partial (\partial^n q_f/\partial x_\lambda \dots \partial x_\rho \dots)} \right) \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^{n-j-1}}{\partial x_\upsilon} \left(\delta q_f - \sum_\pi \frac{\partial q_f}{\partial x_\pi} \delta x_\pi \right) - \delta x_\rho L \right]. \tag{28}$$

The integration region having the form of a hypercylinder with lateral surfaces at infinity, for each hypersurface as bases of the cylinder, with some changes of indices, and rearrangements, we have

$$G = \sum_\rho \int d\sigma_\rho \left[\sum_f \sum_{m=1}^{s} \sum_\upsilon \dots R^\upsilon_{(f/m)\rho} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_\upsilon \dots} \delta q_f - \right.$$

$$\left. - \sum_f \sum_{m=2}^{s} \sum_\pi \sum_\upsilon \dots R^\upsilon_{(f/m)\,\rho} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_\upsilon \dots} \left(\frac{\partial q_f}{\partial x_\pi} \delta x_{\pi\,|\,0\,|} \right) - \sum_\pi N_{\pi\rho}\, \delta x_\pi \right] \tag{29}$$

where

$$R^\upsilon_{(f/m)\rho} = \sum_{j=0}^{s-m} \sum_\lambda \dots \sum_{\lambda+j-1} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x_\lambda \dots} \frac{\partial L}{\partial (\partial^{m+j} q_f/\partial x_\lambda \dots \partial x_\rho\, \partial x_\upsilon \dots)} \tag{30}$$

is the generalized canonical conjugate momentum, and

$$N_{\rho\pi} = \sum_f \sum_{m=1}^{s} \sum_\upsilon \dots R^\upsilon_{(f/m)\rho} \frac{\partial^{m-1} q_f}{\partial x_\pi\, \partial x_\upsilon \dots} - L\delta_{\rho\pi} \tag{31}$$

is the generalized energy-momentum tensor of the field.

In order to utilize (9) for $\partial^n q_f/\partial x_\lambda \dots$ we must make $\delta x_\pi = 0$ in the generator G, and we can write

$$\delta \frac{\partial^n_{q_f}(x)}{\partial x_\lambda} = \frac{i}{\hbar} \left[\sum_\rho \int d\sigma_\rho \sum_g \sum_{l=0}^{s-1} \sum_\upsilon \dots R^{\upsilon\,(x')}_{(g/l+1)\,\rho} \frac{\partial^l}{\partial x_\upsilon \dots} \delta q^{(x')}_g, \frac{\partial^n_{q_f}(x)}{\partial x_\lambda \dots} \right]. \tag{32}$$

With a similar procedure as with generalized quantum mechanics, and taking into account the identities (15) together with

$$[A,\ BC]=[A,\ B]_+C-B\,[A,\ C]_+ \tag{33}$$

(the $[\ ]_+$ brackets represent the anticommutators) one obtains

$$\left[\frac{\partial^m q_f(x)}{\partial x_\lambda \cdots},\ R^{\upsilon(x')}_{(g/n+1)\,\rho}\right]_\pm = i\hbar\delta_{f\upsilon}\delta_{\lambda\upsilon}\delta_{m\,n}\delta^\rho(x-x') \tag{34}$$

$$\left[\frac{\partial^m q_f(x)}{\partial x_\lambda \cdots},\ \frac{\partial^n q_g(x')}{\partial x_\mu \cdots}\right]_\pm = 0 \tag{35}$$

$$\left[R^{\mu(x)}_{(f/m)\,\rho},\ R^{\upsilon(x')}_{(g/n)\,\rho}\right]_\pm = 0. \tag{36}$$

These relations a eequivalent in form with the Poisson brackets established in the field theory with higher derivatives by Mušicki [20], but differ slightly from the commutation and anticommutation relations of Riewe and Green [19], due mainly to different notations. For $m=n=0$ equations (34), (35), and (36) reduce to

$$\begin{cases} [q_f(x),\ R_g(x')]_\pm = i\ \delta_{f\upsilon}\delta(x-x') \\ [q_f(x),\ q_g(x')]_\pm = [R_f(x),\ R_g(x')]_\pm = 0 \end{cases} \tag{37}$$

which are identical with the commutation and anticommutation relations from Ref. [3].

REFERENCES

1. Heisenberg W.: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* (romanian translation, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1969).
2. Borneas M.: Nuovo Cimento, 1960, **16**, p. 806.
3. Borneas M.: Acta Physica Polon., 1963, **24**, p. 471.
4. Fried H. and Plebanski J.: Nuovo Cimento, 1960, **18**, p. 884.
5. Schwinger J.: Phys. Rev., 1951, **82**, p. 914.
6. Borneas M.: Am. J. Phys., 1959, **27**, p. 265.
7. Borneas M.: Phys. Rev., 1969, **186**, p. 1299.
8. Rodrigues L. M. C. S. and Rodrigues P. R.: Am. J. Phys., 1970, **38**, p. 557.
9. Riahi F.: Am. J. Phys., 1972, **40**, p. 386.
10. Anderson D.: J. Phys. A., 1973, **6**, p. 299.
11. Anderson D. and Askne J.: Lett. Nuovo Cimento, 1973, **7**, p. 550.
12. Anderson D.: J. Phys. A., 1973, **6**, p. 1129.
13. Mušicki D.: Publ. Inst. Mathem. (Beograd), 1978, **23 (37)**, p. 141.
14. Koestler J. G. and Smith J. A.: Am. J. Phys., 1965, **33**, p. 140.
15. Hayes C. F.: J. Mathe. Phys., 1969, **10**, p. 1555.
16. Tesser H.: J. Math. Phys., 1972, **13**, p. 796.
17. Krüger J.: Physica, 1973, **65**, p. 1.
18. Borneas M.: Inter. J. Theor. Phys., 1976, **15**, p. 773.
19. Riewe F. and Green A. E. S.: J. Math. Phys., 1972, **13**, p. 1368.
20. Mušicki D.: J. Phys. A., 1978. **11**, p. 39.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

CERCETĂRI TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE ASUPRA OPTIMIZĂRII INSTALAŢIILOR INDUSTRIALE DE TERMOCONVERSIE A ENERGIEI SOLARE

BY

C. DE SABATA, A. MUNTEANU, C. MARCU, I. MIHALCA, D. MIHAILOVICI
I. LUMINOSU, M. LÖRINCZ

1. **Introducere.** Cercetările de prognoză în energetica mondială indică, pentru utilizarea energiei solare, procentajele de 2% pentru anul 1990 şi de 6—10% în anul 2000.

Creşterea continuă şi rapidă a preţurilor combustibililor impune urgentarea introducerii energiei solare în domeniul industrial, domeniu care s-a arătat mai rezervat în această problemă, datorită investiţiilor necesare şi a randamentelor încă scăzute ale instalaţiilor de captare a energiei solare.

În cazul termoconversiei energiei solare cu scopul utilizării sub formă de căldură — metoda care dă randamentul cel mai ridicat — problema de bază care se impune atenţiei este aceea de a găsi soluţiile constructive optime prin care să se realizeze dezideratele următoare :

— captarea unei cantităţi cît mai mari de energie
— obţinerea de randamente mari
— realizarea instalaţiilor cu investiţii minime
— uniformizarea puterii captate pe parcursul întregului an calendaristic.

Ne-am propus în acest context să abordăm teoretic şi experimental problema optimizării instalaţiilor de termoconversie destinate a fi folosite în special în domeniul industrial deşi, evident, rezultatele sînt aplicabile şi în construcţia de locuinţe şi pentru diverse utilizări menajere.

2. **Studiul condiţiilor meteorologice din zona de vest a ţării.** Studiul condiţiilor meteorologice din Banat — valabile pentru toată zona de vest a ţării — a scos în evidenţă următoarele particularităţi :

— În perioada 1971—1977, numărul mediu anual de zile senine şi noroase s-a situat la cifra 274 iar a celor acoperite a oscilat în jurul valorii de 91 zile.

Curbele din figura 1 scot în evidență frecvența medie lunară a zilelor senine, noroase și acoperite.

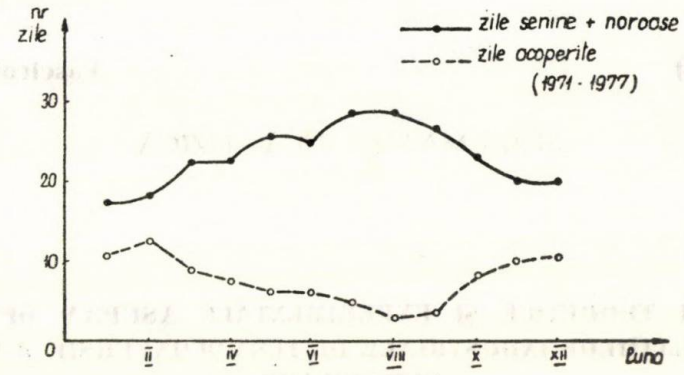


Fig. 1.

– în figura 2 este prezentată situația privind numărul zilelor senine, noroase și acoperite în anul 1978.

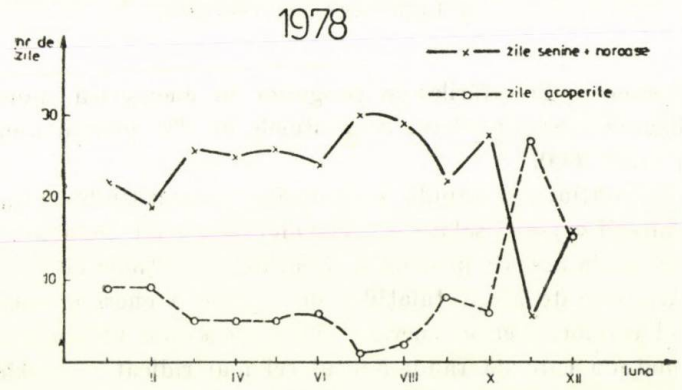


Fig. 2.

– Variația temperaturii medii la ora 14 în intervalul 1971 – 1975, ca medie, este redată în figura 3.

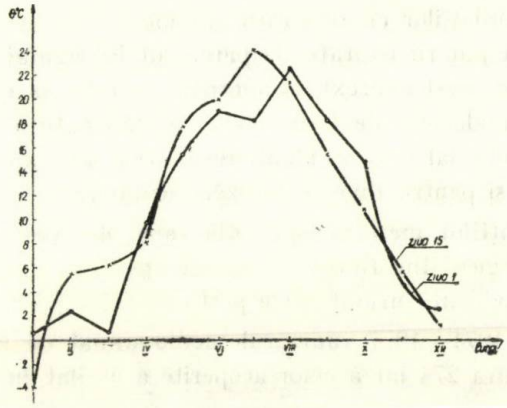


Fig. 3.

— Figura 4 conține variațiile de temperatură la ora 14 în decursul anului 1978.

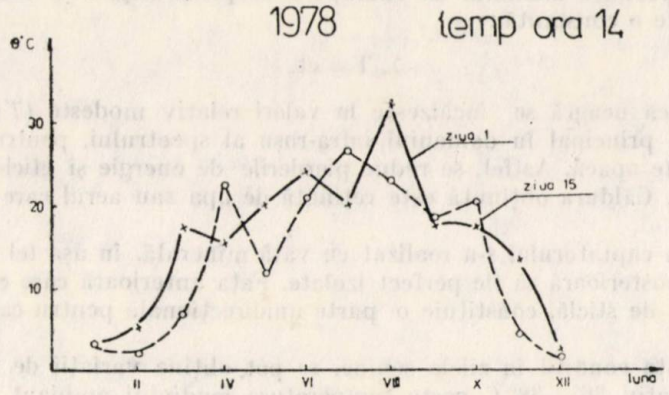


Fig. 4.

Comparînd curbele din figurile 3 și 4 se constată variații mai accentuate de temperatură de la o lună la alta în anul 1978 față de cele din perioada 1971 – 1975.

Menționăm că anul 1978 fiind un an de activitate solară maximă (cu ciclul de 11 ani), a fost influențată puternic clima, în mod negativ din punctul nostru de vedere, de exemplu în lunile noiembrie – decembrie, în Banat, 7 săptămîni cerul a fost acoperit complet în mod continuu.

De asemenea, deși în mod obișnuit în Banat în ianuarie – februarie există perioade lungi însorite și calde, în acest an iarna a fost mult mai geroasă și cerul acoperit aproape continuu.

Aceste condiții meteorologice nu sînt caracteristice zonei de vest dar, chiar și în aceste condiții, captarea și folosirea energiei solare se justifică dacă ne gîndim la țări ca R.F.G. sau Marea Britanie, la care cu un număr de 1 300 – – 1 500 ore de insolație/an se preconizează utilizarea energiei solare, ori în Banat, media pentru 7 ani studiați a numărului orelor de insolație a fost de 2 100.

Ținînd seama de rezultatele obținute din analiza condițiilor meteorologice, devine evident că pentru țara noastră problema utilizării energiei solare este de actualitate, permițînd înlocuirea imediată a unei cantități însemnate de combustibili clasici necesari obținerii de căldură cu această formă de energie, care, în plus, este gratuită și nepoluantă.

3. **Termoconversia energiei solare.** Cercetările efectuate la Catedra de fizică de la Institutul politehnic „Traian Vuia" din Timișoara au cuprins o plajă largă de preocupări, printre care și problema termoconversiei prin efect de seră cu utilizare directă.

În cadrul cercetărilor referitoare la captarea eficientă a energiei solare sub formă de căldură, s-a făcut un studiu teoretic și experimental în legătură cu folosirea insolatoarelor plane, forma cea mai simplă și de cel mai înalt randament în domeniul captării.

Funcționarea captatorului plan (fig. 5) se bazează pe „efectul simplu de seră" ce constă în următoarele : placa metalică înnegrită, ce intră în componența insolatorului și care este expusă radiațiilor solare, absoarbe o mare parte din energia recepționată. Dacă suprafața înnegrită este acoperită cu o placă de sticlă se creează „efectul simplu de seră" sticla lasă să treacă lumina solară,

dar este opacă pentru lungimile de undă mari, reemise de placa fierbinte.

Într-adevăr, legea lui Wien arată că produsul între lungimea de undă λ_m la care se produce maximul de radiație a corpului negru și temperatura sa absolută este o constantă :

$$\lambda_m T = \text{ct.} \tag{1}$$

or cum placa neagră se încălzește la valori relativ modeste ($T \cong 340°$ K) ea va radia în principal în domeniul infra-roșu al spectrului, pentru care placa de sticlă este opacă. Astfel, se reduc pierderile de energie și eficiența colectorului crește. Căldura obținută este reținută de apa sau aerul care circulă prin colector.

Izolația captatorului s-a realizat cu vată minerală, în așa fel încît părțile laterale și posterioară să fie perfect izolate. Fața anterioară care este echipată cu un strat de sticlă, constituie o parte unidirecțională pentru captarea energiei solare.

În aceste condiții în zilele senine, se pot obține variații de temperatură de aproximativ 36° — 38° C peste temperatura mediului ambiant, în timp de 4 — 5 ore de expunere normală [1].

În cazul insolatorului, echipat cu două straturi de sticlă, izolația feței anterioare devine mai bună, însă în schimb, se măresc pierderile optice.

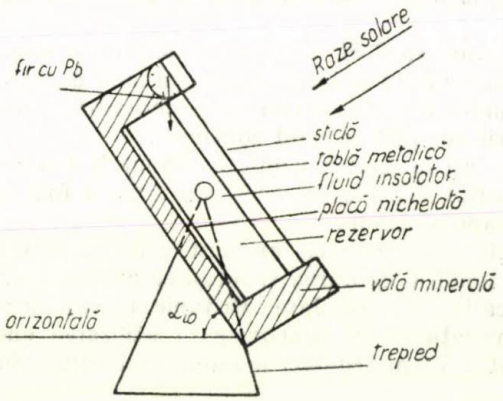


Fig. 5.

Randamentul global η_g al captatorului este determinat de randamentul optic η_0 și de cel termic η_t.

Randamentul termic se poate calcula pentru diferite temperaturi, prin formula :

$$\eta_t = 1 - \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0} \tag{2}$$

unde $\Delta\theta$ este variația de temperatură ; $\Delta\theta_0$ — maximul variației de temperatură față de mediul ambiant.

Reprezentînd grafic valorile instantanee $\eta_{ti} = f(\Delta\theta)$ (fig. 6) se constată o creștere a randamentului cu mărimea efectului de seră, pentru același interval de temperatură [2].

Din punct de vedere termic, efectul multiplu de seră se justifică pentru temperaturi mai mari, dar eficiența sa pe scară industrială este modestă în raport cu al efectului simplu de seră. De asemenea, din punct de vedere economic și constructiv, introducerea a mai multor straturi este destul de complicată.

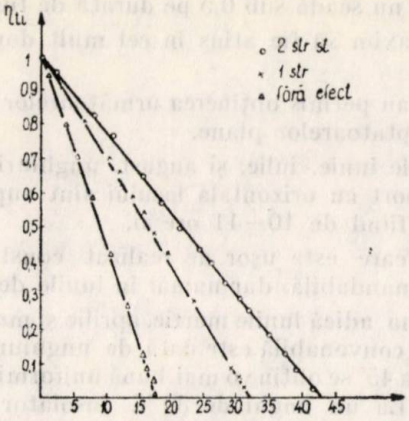


Fig. 6.

4. **Optimizări pe calculator în vederea ridicării randamentului la termoconversia directă.** În cazul aplicațiilor industriale, instalațiile de captare fiind de dimensiuni mari, apar ca probleme majore două aspecte : al pozării captatorului în funcție de cerințele beneficiarului și al determinării formei și lungimii de parcurs a agentului termic pentru a îmbina cît mai bine aspectul economic cu cel al realizării datelor impuse de procesul tehnologic căruia îi este destinată spre utilizare, căldura obținută din energie solară.

4.1. **Optimizarea pozării insolatoarelor plane de captare a energiei solare.** Beneficiarii din industrie, interesați în obținerea de căldură prin termoconversie directă se pot clasifica, în funcție de perioada calendaristică de lucru, în felul următor :

— hale de funcționare vara, la temperatura de cca 70 °C timp de 3—4 luni : uscătorii de produse ceramice, fructe, semințe și, în anumite cazuri lemn ;

— hale de funcționare la temperaturi situate pe o plajă largă (40—70 °C) timp de 8—9 luni pe an, de primăvara și pînă toamna : uscătorii de produse ceramice, apă caldă tehnologică și cu scopuri sanitare, etc ;

— hale de dezgheț, funcționînd iarna, 4—5 luni pe an, la o temperatură de 20—40° C.

În funcție de aceste condiții, au fost întocmite programe pentru calculatorul Felix C 256, impunîndu-se ca pozarea insolatorului să asigure :

— randamentul optic teoretic, datorită înclinației insolatorului (fig. 7) prin raport cu direcția razelor solare, $\frac{I}{I_0} > 0{,}9$ timp de 4 ore/zi, unde I_0 este insolația și I partea care ajunge pe insolator ;

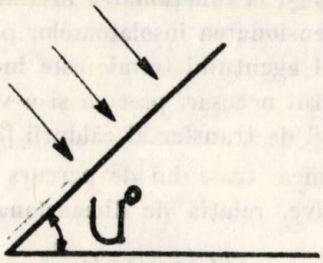


Fig. 7.

– randamentul să nu scadă sub 0,5 pe durata de funcționare a instalației;

– randamentul maxim să fie atins în cel mult două ore de la începutul funcționării.

Programele rulate au permis obținerea următoarelor valori pentru unghiul u_0 de pozare a heliocaptatoarelor plane.

Vara adică în lunile iunie, iulie, și august, unghiurile optime de înclinare ale insolatorului în raport cu orizontala locului sînt cuprinse între 10° și 20°, durata de funcționare fiind de 10 – 11 ore/zi.

Înclinația de 10°, care este ușor de realizat constructiv pentru un acoperiș este cea mai recomandabilă, dar numai în lunile de vară.

Primăvara și toamna, adică lunile martie, aprilie și mai, respectiv septembrie și octombrie, înclinarea convenabilă este dată de unghiurile cuprinse între 35° și 45°, cu observația că la 45° se obține o mai bună uniformizare a energiei captate de-a lungul perioadei. La un unghi de 30 °C, insolatorul atinge maximul de randament în luna aprilie. Durata de funcționare a insolatorului în acest interval este de 7 – 10 ore/zi.

Iarna, adică în lunile noiembrie, decembrie, ianuarie și februarie, unghiurile optime de înclinare se situează între 50° și 70°, insolatorul funcționînd 6 ore/zi, cu un randament $I/I_0 \geqslant 0{,}5$.

Maximul de randament se obține la 60°, însă este preferabil unghiul de 70°, care permite obținerea în lunile decembrie-ianuarie a unei energii apropiate de cea primită în perioada februarie respectiv noiembrie.

Se constată că înclinația de 70° asigură condiții optime cvasiegale pentru cele patru luni de iarnă. De asemenea, orice abatere de la acest interval de unghiuri reduce brusc randamentul.

Dacă se pune problema funcționării în condiții bune ale unui insolator plan de-alungul anului calendaristic, intră în discuție faptul că iarna insolația este mult mai redusă și ca valoare și ca durată, astfel încît este necesară alegerea acelei soluții care dă un randament mediu anual maxim. Evident, această soluție reduce randamentul vara, însă dă rezultate foarte bune primăvara și toamna, și mulțumitoare iarna. Din intervalul 40° – 50°, unghiul de 50° este cel mai indicat, evident la latitudinea țării noastre.

Calculele efectuate în acest sens au scos în evidență faptul că, orice abatere de la aceste indicații duce la o scădere bruscă atît a randamentului, cît și a duratei în care instalația lucrează cu $I/I_0 \geqslant 0{,}5$.

Toate valorile arătate anterior au fost determinate în așa fel, încît insolatorul să atingă randamente de 50% după aproximativ 2 ore de la începutul funcționării, iar timpul de insolație să fie maxim.

4.2. **Optimizarea dimensiunilor canalului de circulație a agentului termic în funcție de parametri impuși la funcționarea insolatoarelor în regim dinamic, folosindu-se aer cald.** Dimensionarea insolatoarelor plane din puctul de vedere al secțiunii de circulație al agentului termic este indicat să se facă avînd ca bază de dimensionare debitul necesar, precum și o viteză la care să fie asigurat un coeficient convenabil de transfer al căldurii [3].

Presupunînd că lungimea traseului de parcurs al agentului termic este impusă de date constructive, relația de dimensionare pentru secțiune este :

$$S = \frac{\lambda l L}{\rho v c} \left(\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T} \right)^{-1} . \qquad (3)$$

în care : λ este coeficientul de transfer al căldurii de la partea caldă a insolatorului la agentul termic,
l – lungimea conturului secțiunii
L – lungimea celulei de insolator plan
ρ – densitatea agentului termic
v – viteza agentului termic
c – căldura specifică a agentului termic
T_1 – temperatura suprafeței absorbante
T_2 – temperatura agentului termic la intrarea în insolator
T – temperatura agentului termic la ieșirea din insolator

Practic este indicat ca secțiunea să se calculeze în funcție de debitul agentului termic și de viteza acestuia, conform expresiei :

$$D = v \cdot S, \tag{4}$$

iar dimensionarea insolatorului să se facă referitor la lungimea acestuia

$$L = \frac{\rho \cdot D \cdot c}{\lambda c} \ln \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T} \tag{5}$$

Temperatura suprafeței absorbante se determină din relația :

$$T_1 = T_2 + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{S_r}{S_p} \cdot J, \tag{6}$$

unde :

α – reprezintă coeficientul de absorbție a materialului absorbant
S_r – secțiunea iradiată
S_p – suprafața de pierderi
J – iradiația în W/m^2

La un coeficient de absorbție de 0,9, un raport $S_r/S_p = 0{,}66$, o iradiație de 1 000 W/m^2 și o temperatură a mediului ambiant $T_2 = 20°$ se obține $T_1 = 70°$ C.

În privința lungimii optime a transerului agentului termic s-a constatat că valorile sînt cuprinse între 40 și 60 m, pentru o viteză a acestuia de 2 m/s, la un debit de aproximativ 2 200 m^3/h.

Avînd în vedere numărul mare de parametri ce intervin și combinațiile valorice posibile, determinate atît de condițiile meteorologice foarte variate, precum și de posibilitățile practice constructive, s-a făcut un studiu de optimizare pe calculator [4]. S-a utilizat calculatorul Felix C 256 impunîndu-se prin program diverse debite, intervale de temperatură și secțiuni de circulație a agentului termic. Astfel, viteza de circulație a aerului a fost $v \in [1, 10]$ m/s, ceea ce în funcție de deschiderea aleasă, a condus la debite $D_v \in [3\,600 - 10\,800]$ m^3/h.

În figura 8 s-a sintetizat dependența lungimilor de parcurs de forma și aria secțiunii de circulație pentru același interval de temperatură.

Analiza acestor rezultate scoate în evidență că, din punctul de vedere al funcționării, insolatoarelor cu aer avînd secțiunea de circulație $(0{,}25 \times 0{,}25)$m^2 sînt cele mai avantajoase pentru un debit al agentului termic de pînă la 6 000 m^3/h. Lungimea parcursului ce trebuie realizat în acest caz este cuprinsă între 50 și 75 m ceea ce este în concordanță cu posibilitățile de realizare pe acoperișul unor hale industriale.

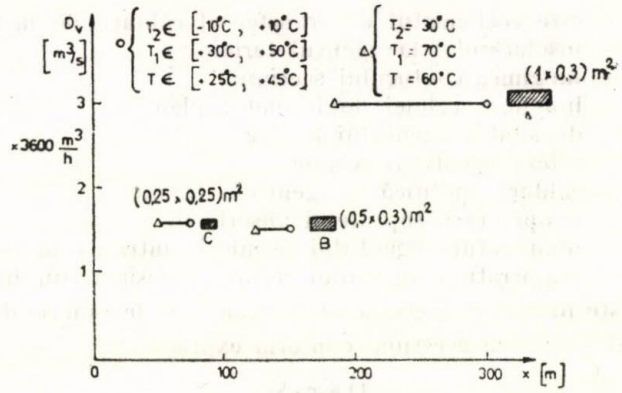


Fig. 8.

5. **Cercetări experimentale.** În vederea stabilirii puterilor ce se obţin pe unitatea de suprafaţă a heliocaptatorului plan, s-au construit mai multe tipuri de insolatoare, sistemul cel mai util pentru lucru fiind captatorul duplex, format din două insolatoare, unul ca motor iar la celălalt existînd posibilitatea modificării unora din parametri ; cele două captatoare au dimensiuni identice. În măsurătorile efectuate s-au urmărit ;

5.1. **Influenţa formei materialului absorbant.** Experienţele efectuate în condiţii meteorologice identice, cu agentul termic aerul, în regim static arată că, insolatorul cu placă ondulată prezintă un avans de aproximativ o oră faţă de cel cu suprafaţa plană, iar maximul se menţine la o diferenţă de 3—4 °C mai mare. În ambele cazuri, maximele se ating simultan, în jurul orelor 13—14.

La placa ondulată, datorită măririi suprafeţei ei, pierderile termice sînt mai mari, ceea ce conduce la o răcire mai rapidă a insolatorului în raport cu martorul, din momentul intrării în umbră.

Măsurătorile efectuate cu apă, ca fluid de captare, evidenţiază o diferenţă de 2 °C în punctul iniţial şi 6 °C în punctele de temperatură maximă, în favoarea insolatorului cu suprafaţa ondulată.

5.2. **Influenţa orientării heliocaptatorului în raport cu direcţia de incidenţă a razelor solare.** Experienţele efectuate cu heliocaptatorul orientat cu 15° spre sud-est şi înclinarea de 48° comparativ cu martorul orientat spre sud, la aceeaşi înclinare de 48°, conduc la observarea că, funcţionarea captatorului poate fi eficientă şi pe o direcţie diferită de sud.

5.3. **Influenţa efectului dublu de seră (cu sticlă şi cu folie de polietilenă).** Eficienţa martorului echipat cu o folie de polietilenă este resimţită de la temperatura de 65 °C faţă de cea a insolatorului propriu-zis, iar viteza sa de încălzire este 14 °C/oră faţă de 10 °C/oră, lucrînd în condiţiile unui cer senin. În acelaşi timp se modifică valoarea maximelor : martorul— 94 °C, insolatorul — — 85 °C, maxime care sînt atinse simultan.

În condiţii de cer variabil, valoarea maximelor devine 83° C pentru martorul protejat cu folie şi 80 °C pentru insolator, iar depăşirea insolatorului de către martor are loc la temperatura de 45 °C, după 2 ore de funcţionare.

În privinţa efectului combinat de ondulare şi protecţie se evidenţiază că, martorul se detaşează din nou de insolator de la 45 °C, viteza de încălzire al martorului fiind de 24 °C/oră faţă de 20 °C/oră a insolatorului, iar maximele sînt atinse simultan.

Experienţele au mai demonstrat că, în condiţiile meteorologice variabile ale primăverii şi toamnei este avantajos ca helioconvertorul să fie protejat cu o folie de polietilenă, ceea ce contribuie la micşorarea vitezei de răcire.

6. **Concluzii.** Din analiza principalilor factori care determină buna funcţionare a heliocaptatoarelor plane cu efect de seră, combinat cu studiul meteo extins pe o durată de 7 ani pentru regiunea de vest a ţării, se poate conchide în mod indubitabil asupra oportunităţii folosirii acestor instalaţii la scară industrială, pentru obţinerea de aer sau apă caldă.

La o construcţie îngrijită a captatoarelor şi la o alegere convenabilă a orientării, în funcţie de necesităţi, se pot obţine puteri de 350–650 W/m^2 pe durata de 6 luni calde ale anului calendaristic.

În plus construcţia este simplă, se folosesc numai materiale autohtone iar economia de combustibil clasic este întovărăşită de avantajul acestor instalaţii de a fi total nepoluante.

BIBLIOGRAFIE

1. De Sabata C., ; Luminosu I.: Buletinul ştiinţific şi tehnic al Instit. politehnic „Traian Vuia" Timişoara, seria matematică-fizică-mecanică, 1978, Tom 24 (38), fasc. 1
2. De Sabata C.; Luminosu I.: Buletinul ştiinţific şi tehnic al Instit. politehnic „Traian Vuia" Timişoara, seria matematică–fizică–mecanică, 1978, Tom 24 (38). fasc. 2
3. Marcu C.; De Sabata C.: Buletinul ştiinţific şi tehnic al Instit. politehnic „Traian Vuia" Timişoara, seria matematică–fizică–mecanică, 1979, Tom 25 (39), fasc. 1
4. De Sabata.; Marcu C.: Buletinul ştiinţific şi tehnic al Instit. politehnic „Traian Vuia" Timişoara, seria matematică–fizică–mecanică, 1979, Tom 25 (39), fasc. 1

THEORETISCHE UND EXPERIMENTELE UNTERSUCHUNGEN DER OPTIMISIERUNG DER ANLAGEN IN BEZUG AUF DIE THERMOKONVERSION DER SONNENENERGIE

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit beschäftigten wir uns mit theoretische und experimentelle Untersuchungen in bezug auf die Optimisierung der thermokonversiven Anlagen, welche in der Industrie benötigt werden.

Aus den Analyse der Hauptfaktoren, die die gute Funktionierung der ebenen Insolatoren beeinflussen und aus den untersuchten meteorologischen Daten, geht hervor die Nützlichkeit dieser in der Industrie, um warme Luft und Wasser zu erhalten.

Im Falle einer gut projetierten Sonnenanlage und einer passenden Orientierung des Insolatores erzielt man für die warme Jahreszeit, Leistungen mit Werten zwischen 350–650 W/m^2.

REFERENCES

1. Heisenberg W.: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* (romanian translation, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1969).
2. Borneas M.: Nuovo Cimento, 1960, **16**, p. 806.
3. Borneas M.: Acta Physica Polon., 1963, **24**, p. 471.
4. Fried H. and Plebanski J.: Nuovo Cimento, 1960, **18**, p. 884.
5. Schwinger J.: Phys. Rev., 1951, **82**, p. 914.
6. Borneas M.: Am. J. Phys., 1959, **27**, p. 265.
7. Borneas M.: Phys. Rev., 1969, **186**, p. 1 299.
8. Rodriguez L.M.C.S. and Rodrigues P. R.,: Am. J. Phys., 1970, **38**, p. 557.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom 24 (38) **Fascicola 2—1979**

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ

ON THE GENERALIZED MECHANICS OF SPINNING PARTICLES

BY

M. BORNEAS

The interest for theories based on Lagrangians with higher order derivatives keeps its momentum, as recent developments by Ellis [1] and Mušicki [2] [3] show. This is not only because of the importance of higher derivatives in quantum field theory, but also for the possibilities of extending mechanics in order to build useful classical models. Now when the euphoria raised by the past successes of quantum mechanics, belived as a panacea, begins to fade, and physicists are frantically looking for good theories of fundamental particles, sometimes, even in entirely new directions [4] [5], any model can contribute with something, at least to point out difficulties which may aries in quantum theory too, as Feynman hints in his Lectures [6]. With these considerations in view, we want to elaborate in this paper, on some aspects of the generalized mechanics with higher order derivatives [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [3].

It has been recently shown by Riewe [13] that a classical particle with spin can be represented within the framework of the generalized mechanics, by introducing into the Lagrangian second order derivatives of the coordinates. This leads to equations of motion containing derivatives of the coordinates higher than the second order.

The possibility of adding so called second order accelerations for supplementary description of the motion was envisaged by Résal [21], and later on by Beleş [22] and Trăilescu [23] ; but this second order acceleration was only an extrinsic kinematic magnitude, obtained by the derivation of the usual acceleration, not included in the equations of motion, thus leaving unchanged the mechanics of the system. Second order derivatives of the coordinates have also been introduced in the Lagrangian by the present author [24] [25], aiming to a new interpretation of quantum mechanics. Riewe's approach is a consistent development of generalized classical mechanics with higher order derivatives.

Starting from the Lagrangian [13]

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right)^2 - \left(\frac{\ddot{\vec{r}}}{w} \right)^2 \right] \tag{1}$$

(this is the nonrelativistic version) where

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{2}$$

one obtains the equation of motion

$$\dddot{\vec{r}} + \omega^2 \ddot{\vec{r}} = 0 \tag{3}$$

which has a particular solution

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + l_0 (\vec{i} \cos \omega t + \vec{j} \sin \omega t) \tag{4}$$

($\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, l_0 are integration constants; $\vec{i}$, $\vec{j}$ are unit vectors).

Riewe interprets equation (4) as describing a particle moving with internal speed $l_0\omega$ in a circular orbit of radius l_0 about a point obeying

$$\vec{r}_{center} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \tag{5}$$

i.e. a spinning particle. A relativistic version is given too.

Ellis [1] contributes to these results by introducing a Lagrangian with augmented variables:

$$L^* = \frac{1}{2}(\lambda_1 - mc^2)\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{2}\frac{mc^4}{\omega^2}\dot{\lambda}_2^\mu \dot{\lambda}_{2\mu} + \lambda_3^\mu (\dot{x}_\mu - \lambda_{2\mu}) - \frac{1}{2}\lambda_1 \tag{6}$$

where $\dot{\lambda}_2^\mu = \ddot{x}_\mu$.

On the other hand equation (3) may be interpreted as a description of a system of masspoints [19] [26] [27] [28] by means of a point called by Knapecz [26] the „indicator" of the system.

Now, bearing in mind the above results, we propose a model of particle with internal structure, described by a Lagrangian of the form (1), but ω being determined by an „internal" variable. We then write

$$L = -mc^2 + \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - \frac{m}{2}\sum \ddot{x}_j^2 \dot{\varphi}^{-2} - U \tag{7}$$

where

$$\varphi = fy \tag{8}$$

is the angular coordinate, proportional to the „internal" variable y, the coefficient f depending in general on the coordinates x_k.

The Lagrangian now reads

$$L = -mc^2 + \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - \frac{m}{2}\sum_j \ddot{x}_j^2 (\dot{f}y + f\dot{y})^{-2} - U. \tag{9}$$

This Lagrangian leads to the equations of motion

$$m \dddot{x}_k (\dot{f}y + (f\dot{y})^{-2} + m\ddot{x}_k [1 + 6(\dot{f}y + f\dot{y})^{-4}(\ddot{f}y + 2\dot{f}\dot{y} + f\ddot{y})^2$$

$$- 2(\dot{f}y + f\dot{y})^{-3}(\dddot{f}y + 3\ddot{f}\dot{y} + 3\dot{f}\ddot{y} + f\dddot{y})]$$

$$- m\sum_j \ddot{x}_j^2 (\dot{f}y + f\dot{y})^{-3}\left(\frac{\partial \dot{f}}{\partial x_k} y + \frac{\partial f}{\partial x_k}\dot{y}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0 \tag{10}$$

$$2\sum_j \dddot{x}_j \dot{x}_j (\dot{fy}+f\dot{y})^{-3} f - \sum_j \ddot{x}_j^2 [(\dot{fy}+f\dot{y})^{-3} \dot{f} - 3(\dot{fy}+f\dot{y})^{-4} (\ddot{fy}+2\dot{f}\dot{y}+f\ddot{y}) f] = 0. \quad (11)$$

For a constant potential *Eq.* (10) reduces to

$$m\ddot{x}_k = Q_k \quad (12)$$

where the notation

$$Q_k = m(\dot{fy}+f\dot{y})^{-2}[1+6(\dot{fy}+f\dot{y})^{-4}(\ddot{fy}+2\dot{f}\dot{y}+f\ddot{y})^2 - 2(\dot{fy}+f\dot{y})^{-3}(\dddot{fy}+3\ddot{f}\dot{y}+3\dot{f}\ddot{y}+f\dddot{y})]^{-1}[\sum_j \ddot{x}_j(\dot{fy}+f\dot{y})^{-1}\left(\frac{\partial \dot{f}}{\partial x_k}y + \frac{\partial f}{\partial x_k}\dot{y}\right) - \ddot{x}_k] \quad (13)$$

has been used. Equation (12) shows that even when the particle has a free motion from strictly classical point of view, there is a self-force acting on it. In this case, at least, φ must be periodic

$$\varphi(t) = \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi n \quad (14)$$

with $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, and T the period of a complete spinning of the particle.

For $\dot{\varphi}=\omega$, and f constant, equation (10) becomes

$$m\dddot{x}_k\omega^{-2} + m\ddot{x}_k + \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0 \quad (15)$$

which for a constant potential is exactly Riewe's equation ; in this case, of course, equation (11) must be dropped.

It is clear that even if $\dot{\varphi}$ is not constant but periodic, and we put in to the equations of motion (10) an average value of $\dot{\varphi}$, the result of Riewe is found again.

We point out to the following interesting feature. In a recent work Varma [29] obtained the equations of motion for a particle as

$$m\ddot{x}_j = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_k, \chi) \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}(g\dot{\chi}) = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 \frac{\partial g}{\partial \chi}. \quad (17)$$

where χ is an angular coordinate, considered a „free" variable, i.e. practically a hidden parameter. He thus gives a deterministic model for quantum mechanics. If an identification is made between χ and φ, equation (12) can be put in a form analogous to (16), with

$$Q_k = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \tilde{Q}_k = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \frac{\partial G}{\partial x_k} \quad (18)$$

where $\tilde{Q}_k$ is the rest of Q_k when $(1/2)\dot{\varphi}^2$ has been extracted as factor.

But the equation (11) cannot be put into the form (17). However, the interpretation of Varma could still be considered.

In conclusion we can assert that there is room for new developments within the framework of the generalized mechanics with higher order derivatives.

REFERENCES

1. Ellis J. R.: J. Phys. A, 1975, **8**, p. 496.
2. Mušicki D.: J. Phys. A, 1978, **11**, p. 39.
3. Mušicki D.: Publ. Inst. Math. (Beograd), 1978, **23 (37)**, p. 141.
4. De Broglie L.: *Etude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.
5. Belinfante F. J.: *A Sourvey of Hidden-Variables Theories*, Pergamon Press, Oxford, 1973.
6. Feynman R. P.: *Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1964.
7. Borneas M.: Am. J. Phys., 1959, **27**, p. 265.
8. Borneas M.: Acta Phys. Polon., 1963, **24**, p. 471.
9. Koestler J. G. a. Smith J. A.: Am. J. Phys., 1965, **33**, p. 140.
10. Hayes C. F. a. Jankowski J. M.: Nuovo Cimento, 1968, **58**, p. 494.
11. Borneas M.: Phys, Rev., 1969, **186**, p. 1 299.
12. Rodrigues L. M. C. S. a. Rodrigues P. R.: Am. J. Phys., 1970, **38**, p. 557.
13. Riewe F.: Lett. Nuovo Cimento, 1971, **1**, p. 807
14. Riewe F.: Nuovo Cimento, 1972, **B 8**, p. 271.
15. Riahi F.: Am. J. Phys., 1972, **40**, p. 386.
16. Tesser H.: J. Math. Phys., 1972, **13**, p. 796.
17. Anderson D.: J. Phys., A, 1973, **6**, p. 299.
18. Anderson D.: Lett. Nuovo Cimento, 1973, **7**, p. 317.
19. Anderson D.: J. Phys. A, 1973, **6**, p. 1 129.
20. Anderson D. a. Askne J.: Lett. Nuovo Cimento, 1973, **7**, p.550.
21. Résal H.: *Traité de mécanique générale*, VII, Gauthier-Villars, Paris, 1895.
22. Beleş M. A.: Bull. Math. Phys. Éc. Polyt., Bucarest, 1936—37, **8**, p. 77.
23. Trăilescu S.: Bull. Sci. Techn. Polyt., Timişoara, 1948, **13**, p. 239.
24. Borneas M. a. Kalman E.: Studii şi cercetări de fizică, 1955, **6**, 299.
25. Borneas M.; Studii şi cercetări de fizică, 1955, **6**, p. 427.
26. Knapecz G.: Acta Phys. Polon., 1974, **B 5**, p. 605.
27. Knapecz G.: Lett. Nuovo Cimento, 1974, **10**, p. 90.
28. Constantelos G. C.: Nuovo Cimento, 1974, **21 B**, p. 279.
29. Varma R. K.: Pramāna, 1978, **10**, p. 89.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA

But the equation (11) cannot be put into the form (17). However, the interpretation of Varma could still be considered.

In conclusion we can assert that there is room for new developments within the framework of the generalized mechanics with higher order derivatives.

REFERENCES

1. Ellis J. R.: J. Phys. A, 1973, 6, p. 196
2. Wosicki D.: J. Phys. A, 1978, 11, p. 39.
3. Wosicki D.: Publ. Inst. Math. (Beograd), 1978, 23 (37), p. 111.
4. Cadroglio L.: Étude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1963
5. Belinfante F. J.: A Solution of Hidden Variables Theories, Pergamon Press, Oxford 1973.
6. Feynman R. P.: Lectures on Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964
7. Borneas M.: Am. J. Phys., 1952, 27, p. 26.
8. Borneas M.: Acta Phys. Polon., 1963, 24, p. 171
9. Koestler J. G. a Smith J. A.: Am. J. Phys., 1958, 33, p. 140
10. Danos C. G. a Łuniewski J. M.: Nuovo Cimento, 1968, 58, p. 131
11. Borneas M.: Phys. Lett., 1966, 186, p. 299
12. Rodrigues E. M. L. S. a Rodrigues E. P.: Am. J. Phys., 1970, 38, p.
13. Blewe E.: Lett. Nuovo Cimento, 1971, 1, p. 807
14. Blewe E.: Nuovo Cimento, 1972, B 8, p. 271
15. Blahi F.: Am. J. Phys., 1972, 40, p. 989
16. Tesser M.: J. Math. Phys., 1972, 13, p. 706
17. Anderson D.: J. Phys. A, 1973, 6, p. 299
18. Anderson D.: Lett. Nuovo Cimento, 1973, 7, p. 317
19. Anderson D.: J. Phys. A, 1973, 6, p. 1129
20. Anderson D. a Askner J.: Lett. Nuovo Cimento, 1974, 7, p. 330
21. Resal H.: Traité de mécanique générale, VII, Gauthier-Villars, Paris, 1890
22. Bates M. A.: Bull. Math. Phys. Gé. Polyt., Bucarest, 1960-61, 8, p. 77.
23. Trailescu S.: Bull. Sci. Techn. Polyt., Timisoara, 1948, 13, p. 289
24. Borneas M. a Dalman P.: Studii si cercetari de fizica, 1953, 6, 299
25. Borneas M.: Studii si cercetari de fizica, 1954, 6, p. 1
26. Knapecz G.: Acta Phys. Polon., 1971, B 3, p. 603
27. Knapecz G.: Lett. Nuovo Cimento, 1974, 10, p. 90
28. Constantelos G. C.: Nuovo Cimento, 1974, 24 B, p. 279
29. Varma P. K.: Pramana, 1978, 10, p. 8

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tomul 24 (38) Fascicola 2

IULIE–DECEMBRIE
1979

Cititorii din străinătate se pot abona prin

I L E X I M,

Serv. Export-import presă – Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3–5 – P.O.B. 136–137

Bucharest – Romania